Matemática IV - MA 044
Quarta Lista

1. Verifique que cada uma das seguintes funções é inteira:

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$;

b) $f(z) = e^{-y}\operatorname{sen}(x) - ie^{-y}\cos x$;

c) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$.

2. Mostre que as seguintes funções não são analíticas em nenhum ponto:

a) $f(z) = xy + iy$;

b) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$;

c) $f(z) = e^y e^{ix}$.

3. Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Mostre que $f \circ g$ e $(c_1 f + c_2 g)$ são funções inteiras.

4*.** Se uma função f não é analítica em um ponto z_0 mas, para toda vizinhança de z_0 existe um ponto onde f é analítica, o ponto z_0 é chamado de **ponto singular** ou **singularidade** de f. Determine os pontos singulares das funções a seguir:

a) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$;

b) $f(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2}$;

c) $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$.

5 Seja f uma função analítica em todo ponto de um domínio D. Prove que se $f(D) \subset \mathbb{R}$ então $f(z)$ deve ser constante em D.

6. Mostre que $u(x, y)$ é harmônica em algum domínio quando

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$;

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$;

c) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$.

7. Mostre que

a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$;

b) $\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1 + i)$;

c) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$.

8. Mostre que a função $f(z) = \exp \overline{z}$ não é analítica em nenhum ponto.

9. Mostre de duas formas que a função $f(z) = \exp(z^2)$ é inteira. Qual é a derivada de f ?

10. Mostre que , se $z = x + iy$ então

$$|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| \leq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

11. Mostre que $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

12. Prove que $|exp(-2z)| < 1$ se, e somente se, $\mathrm{Re}(z) > 0$.

13. Determine os valores de z para os quais:

a) $e^z = -2$;

b) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$;

c) $e^{2z-1} = 1$.

14. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica em um certo domínio D. Diga se a afirmação a seguir é verdadeira (neste caso prove) ou falsa (neste caso dê um contra-exemplo): " As funções $U(x, y) := e^{u(x,y)} \cos v(x, y)$ e $V(x, y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen}(v(x, y))$ são harmônicas em D."

15. Mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$ temos $(e^z)^n = e^{nz}$.
Dica: Primeiro mostre para $n = 0, 1, 2, ...$ usando indução. Depois use os fatos $z^{-n} = (z^{-1})^n$ e $e^{-z} = 1/e^z$ para extender o resultado para $n < 0$.

16. Mostre que

a) $Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$;

b) $Log(1 - i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$.

17. Mostre que

a) $\log e = 1 + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$;

b) $\log i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$;

c) $\log(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2\left(n + \frac{1}{3}\right)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

18. Mostre que

a) $Log(1 + i)^2 = 2Log(1 + i)$;

b) $Log(-1 + i)^2 \neq 2Log(-1 + i)$.

19. Determine todas as raízes da equação $\log z = i\pi/2$.

20. Suponha que um ponto $z = x + iy$ está na faixa horizontal $\alpha < y < \alpha + 2\pi$. Mostre que quando o ramo $\log z = \ln r + i\theta$ $(r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$ do logaritmo é usado, temos

$$\log(e^z) = z.$$

21. Mostre que a função

$$f(z) = \frac{Log(z + 4)}{z^2 + i}$$

é analítica em todos os pontos exceto nos pontos $\pm(1 - i)/\sqrt{2}$ e na porção $x \leq -4$ do eixo real.

22. Mostre que se $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(z_2) > 0$, então

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2).$$

23. Mostre que para quaisquer dois números complexos z_1 e z_2,

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2N\pi i$$

onde $N \in \{0, -1, 1\}$.

24. Mostre que

a) $(1+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \exp\left(i\frac{\ln 2}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

b) $(-1)^{1/\pi} = e^{(2n+1)i}$, $n \in \mathbb{Z}$.

25. Determine o valor principal de

a) i^i;

- $\left(\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)\right)^{3\pi i}$.

26. Mostre que se $z \neq 0$ e a é um número real, então $|z^a| = \exp(a \ln |z|) = |z|^a$, onde estamos tomando o valor principal em $|z|^a$.

27. Assumindo que $f'(z)$ existe, determine uma fórmula para a derivada $c^{f(z)}$ onde $c \in \mathbb{C}$.