Matemática IV - MA 044
Terceira Lista

1. Mostre que um polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, de grau $n \geq 1$ é diferenciável em todo ponto z com derivada

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}.$$

Mostre que os coeficientes de $P(z)$ satisfazem:

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, ..., \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

2. Encontre $f'(z)$ nos seguintes casos:

a) $f(z) = 5z^3 + 2z - 1$;

b) $f(z) = (2 - z^2)^3$;

c) $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$, $z \neq -1/2$;

d) $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}$, $z \neq 0$.

3. Suponha que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e que $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existem, onde $g'(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

4. Seja $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ e $g(z) = \mathrm{Im}(z)$, mostre que f e g não são diferenciáveis em nenhum ponto.

5. Cálcule $f'(z)$ quando

a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$;

b) $f(z) = \frac{2z-1}{3z+i}$, $z \neq -i/3$;

6. Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ e $f(z) = z^n$, $z_0 \neq 0$, então $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

7. Enuncie e demonstre o Teorema das Equações de Cauchy-Riemann.

8. Enuncie o Teorema da Regra da Cadeia.

9. Use as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ não existe em nenhum ponto z nos seguintes casos:

i) $f(z) = \overline{z}$;

ii) $f(z) = 2x + ixy^2$;

iii) $f(z) = z - \overline{z}$;

iv) $f(z) = e^x e^{-iy}$.

10. Em cada um dos seguintes casos mostre que $f'(z)$ e $f''(z)$ existem em todo ponto e calcule $f''(z)$:

i) $f(z) = iz + 2$;

ii) $f(z) = z^3$;

iii) $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;

iv) $f(z) = e^x e^{-iy}$.

11. Determine onde $f'(z)$ existe e encontre seu valor quando:

i) $f(z) = \frac{1}{z}$;

ii) $f(z) = x^2 + iy^2$;

iii) $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$.

12. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ a forma polar de f. Assuma que f é diferenciável em um ponto $z_0 \neq 0$. Mostre que

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

$$u_y = u_r \operatorname{sen}\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}.$$

13. Seja $f(z) = u + iv$ diferenciável em um ponto não nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Use as expressões encontradas no exercício anterior juntamente com as equações de Cauchy-Riemann na forma polar para reescrever a equação

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

como

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

onde u_r, v_r devem ser calculadas em (r_0, θ_0).