

# Matemática IV - MA 044

## Segunda Lista

1. Defina
  - $\varepsilon$ -vizinhança de um ponto;
  - Ponto interior de um subconjunto  $S \subset \mathbb{C}$ ;
  - Conjunto aberto;
  - Ponto de fronteiro;
  - Fecho de um subconjunto  $S \subset \mathbb{C}$ ;
  - Pontos de acumulação de um conjunto  $S$ .
2. Mostre que um subconjunto  $S \subset \mathbb{C}$  é aberto se, e somente se, todo ponto em  $S$  é ponto interior de  $S$ .
3. Mostre que um conjunto finito de pontos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  não pode ter nenhum ponto de acumulação.
4. Determine os pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:
  1.  $z_n = i^n, n = 1, 2, \dots$ ;
  2.  $0 \leq \text{Arg } z < \pi/2, z \neq 0$ .
5. Escreva a função  $f(z) = z^3 + z + 1$  na forma  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
6. Escreva a função
$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$
na forma  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ .
7. Mostre que

a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)$ ;

b)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ ;

c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$ .

8. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i.$$

9. Calcule

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}.$$

Observação: Deixe bem claro quais resultados são utilizados para calcular este limite.

10. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{\bar{z}} \right)^2.$$

11. Seja  $\Delta z := z - z_0$ . Mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

12. Mostre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0 \text{ se } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$$

e se existe um inteiro positivo  $M$  tal que  $|g(z)| \leq M$  para todo  $z$  em alguma vizinhança de  $z_0$ .

13. Calcule

a)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$ ;

b)  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3}$ ;

c)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1}$ .