MM425: Análise Funcional I
Lista I

1. Mostre que l^p é separável para $1 \leq p < \infty$ e não para $p = \infty$.

2. Mostre que $C[a,b]$ é separável, e use-o para mostrar que $L^p([a,b])$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

3. Mostre que um espaço métrico discreto é separável sss é contável.

4. Dados $1 \leq p < q < \infty$, mostre que $l^p \subset l^q$ e a inclusão é contínua.

5. Mostre que $(l^p, \| \cdot \|_p)$, $1 \leq p < \infty$ e $(l^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ são espaços de Banach.

6. Prove que $\| \cdot \|_p$ não é norma em l^p para $0 < p < 1$.

7. Sejam X, Y evn.

   (a) Prove que $\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$ define uma norma em $X \times Y$. Mostre que $(X \times Y, \| \cdots \|_1)$ é de Banach sss X e Y são de Banach.

   (b) Repita item (a) para $\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

8. Mostre que c e c_0 são subespaços fechados de l^∞, portanto de Banach, mas $(l^p, \| \cdot \|_\infty)$ não é de Banach.

9. Seja $c_{00} := \{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j = 0, \forall\, j > \text{algum } n\}$. Claro que $c_{00} \subset c_0$ e $c_{00} \subset l^P$ para cada $1 \leq p \leq \infty$. Mostre que

   (i) $\| \cdot \|_p$ é norma em c_{00}, $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$.

   (ii) $(c_{00}, \| \cdot \|_p)$ não é completo $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$.

   (iii) o completamento de $(c_{00}, \| \cdot \|_p)$ isometricamente isomorfo a l^p $\forall\ 1 \leq p < \infty$.

   (iv) o completamento de $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ isometricamente isomorfo a c_0.

10. Seja $P[a,b]$ conjunto de polinómios com coeficientes reais definidos no intervalo $[a,b]$. Mostre que o completamento de evn $(P[a,b], \| \cdot \|_\infty)$ é $(C[a,b], \| \cdot \|_\infty)$.

11. Seja X evn e $M \subset X$ um subespaço fechado. Seja $\pi : X \to X/M$, $x \mapsto \tilde{x} := [x] \in X/M$ a aplicação quociente. Prove que

    (a) Se $\tilde{x}_n \to 0$ em X/M, então $\exists\ (x_n) \subset X$ tal que $\pi(x_n) = \tilde{x}_n$ para cada n e $x_n \to 0$ em X.

    (b) Se $x \in X$ e $\tilde{x}_n \to \pi(x)$ em X/M, então $\exists\ (x_n) \subset X$ tal que $\pi(x_n) = \tilde{x}_n$ para cada n e $x_n \to x$ em X.

12. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida finita e $1 \leq p \leq q < \infty$. Mostre que

    (a) $L^q(X) \subset L^p(X)$, e a inclusão é contínua.

    (b) $L^\infty(X) \subset L^q(X)$, e a inclusão é contínua.

13. Seja $1 \leq p < \infty$.

    (i) Mostre que o conjunto das funções contínuas com suporte compacto é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

    (ii) Mostre que o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

14. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, mostre que

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \to 0, \qquad |h| \to 0.$$

15. Seja $1 \leq p < q < r \leq \infty$. Prove as seguintes

$$L^q(X) \subset L^p(X) + L^r(X) \qquad e \qquad L^p(X) \cap L^r(X) \subset L^q(X).$$

16. Seja $1 \leq p < q \leq \infty$. Prove que $L^p(X) \cap L^q(X)$ é evn com a norma

$$\|f\|_{L^p \cap L^q} := \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^q}.$$

    Sera que $L^p(X) \cap L^q(X)$ com esta norma é de Banach?

17. Seja K uma função contínua no quadrado $[a, b] \times [a, b]$. Dada $f \in C[a, b]$, seja $g : [a, b] \to F$ definida por

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy.$$

    (i) Mostre que $g \in C[a, b]$.

    (ii) Se definimos $Tf = g$, prove que $T : C[a, b] \to C[a, b]$ é linear e contínuo e

$$\|T\| \leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x, y)| dy.$$

    Neste caso diremos que T é um operador integral de Fredholm em $C[a, b]$ com núcleo K.

18. Seja K uma função mensurável no quadrado $[a, b] \times [a, b]$ tal que

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

    Dada $f \in L^2[a, b]$, seja $g : [a, b] \to F$ definida por

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy.$$

(i) Mostre que $g \in L^2[a,b]$.

(ii) Se definimos $Tf = g$, prove que $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ é linear e contínuo e

$$\|T\| \leq \Big(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Mostre o mesmo para $T : L^P[a,b] \to L^p[a,b]$ para $1 \leq p \leq \infty$.

19. Sejam X, Y evn e $dim(X) < \infty$. Mostre que cada aplicação linear $T : X \to Y$ é contínua.

20. Sejam X, Y evn e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

    (i) Mostre que o núcleo de T, $KerT := \{x \in X : Tx = 0\}$ é um subespaço fechado de X.

    (ii) Prove que existe um único operador $S \in \mathcal{B}(X/KerT, Y)$ tal que $T = S\pi$, onde π é a projeção. Alem disso vale $\|T\| = \|S\|$.

21. Seja $g \in L^1[0,1]$ e suponha que existe $M > 0$ tal que

$$\Big| \int fg \Big| \leq M\|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty,$$

$\forall$ f limitada e mensurável. Prove que $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e $\|g\|_q \leq M$.
Dica: Use Lema de Fatou.

22. Sejam X, Y evn, $T : X \to Y$ linear e limitado. Mostre que

    (a) $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, $\forall$ $x \in X$.

    (b) Dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $\|Tx_\epsilon\| \geq (\|T\| - \epsilon)\|x_\epsilon\|$.

23. Seja $T : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ dado por $Tx(t) = x'(t)$. Mostre que T é linear mas não é limitado.

24. Sejam X, Y evn. Sejam $T : X \to Y$ e $S : Y \to X$ operadores lineares tal que $TS = I_Y$ e $ST = I_X$, onde I_X e I_Y são operadores idendidades em X e Y respectivamente, então T S são inversíveis e vale $S = T^{-1}$.

25. Seja $(X, \|\cdot\|)$ espaço de Banach e seja $T \in \mathcal{B}(X)$ com $\|T\| < 1$, então mostre que $I - T$ é inversível e

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots$$

e este série converge em $\mathcal{B}(X)$. Mais ainda, prove que

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$