Matemática IV - MA 044
Primeira Lista

1. Defina o conjunto dos números complexos e a operação de multiplicação de números complexos.

2. Verifique que

a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$

b) $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$.

3. Mostre que $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ e que $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

4. Mostre que a operação de multiplicação de números complexos é comutativa.

5. Use a lei associativa da adição e a lei distributiva para mostrar que

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

6. Reduza as seguintes quantidades:

i) $\frac{1+5i}{3-4i}$

ii) $\frac{3+2i}{1+i} + \frac{7-i}{1-i}$

iii) $\frac{2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{1-i}$.

7. Mostre que se $z_1z_2z_3 = 0$ então pelo menos um dos números complexos z_1, z_2, z_3 é nulo.

8. Para cada um dos casos, localize os números $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$ vetorialmente:

i) $z_1 = 2i$, $z_2 = \frac{2}{3} - i$;

ii) $z_1 = i$, $z_2 = 3$;

iii) $z_1 = x + iy$, $z_2 = x - iy$.

9. Utilize as propriedades de módulo já demonstradas em sala para provar que, dados quaisquer números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 com $|z_3| \neq |z_4|$ tem-se:

$$\frac{\mathrm{Re}(z_1 + z_2)}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

10. Mostre que para todo $z \in \mathbb{C}$ temos $\sqrt{2}|z| \geq |\,\mathrm{Re}(z)| + |\,\mathrm{Im}(z)|$.

11. Desenhe o conjunto dos pontos dado pela condição:

a) $|z - 1 + i| = 1$

b) $|z + 2i| \leq 4$

c) $|2z - 2 + i| \geq 7$.

12. Usando as propriedades de conjugados e módulos estabelecidas em sala mostre que

a) $\overline{\overline{z} + 3i} = z - 3i$

b) $|(2\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i) = \sqrt{3}|2z + 5|$.

13. Desenhe o conjunto dos pontos determinado pela condição:

a) $\mathrm{Re}(\overline{z} - i) = 2$;

b) $|2\overline{z} + i| = 4$.

14. Mostre que quando z_2 e z_3 são não nulos temos

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\,\overline{z_3}}.$$

15. Mostre que se $|z| = 2$ então

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}.$$

16. Mostre que a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ pode ser escrita na forma

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

17. Encontre o argumento principal $\operatorname{Arg} z$ quando

a) $z = \frac{i}{-2-2i}$

b) $z = (\sqrt{3} - i)^6$

18. Mostre que $|e^{i\theta}| = 1$ e que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

19. Usando a forma exponencial mostre que

a) $i(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2(1 + \sqrt{3}i)$

b) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$

c) $(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-11}(-1 + \sqrt{3}i)$.

20. Mostre que se $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ e $\operatorname{Re}(z_2) > 0$ então

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2),$$

onde os argumentos principais são usados.

21. Prove que dois números complexos não nulos z_1 e z_2 tem o mesmo módulo se, e somente se, existem números complexos c_1 e c_2 tais que $z_1 = c_1 c_2$ e $z_2 = c_1 \overline{c_2}$.

22. Mostre que para todo $z \neq 1$ temos

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

23. Utilize o resultado do problema anterior para provar que dado qualquer $0 < \theta < 2\pi$ temos

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\theta/2]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

24.

a) Use a fórmula binomial e a fórmula de Moivre para escrever

$$\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta (i \operatorname{sen}\theta)^k,$$

$n = 0, 1, 2, ...$ Defina o inteiro m da seguinte forma: $m = n/2$ se n é par e $m = (n-1)/2$ caso n seja ímpar. Mostre que

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \operatorname{sen}^{2k}\theta,$$

$n = 0, 1, 2, ...$

b) Escreva $x = \cos\theta$ na somatória do final da parte (a). Mostre que fazendo essa substituição, $\cos n\theta$ vira um polinômio em x:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k,$$

$n = 0, 1, 2, ...$

25. Encontre as raízes quadradas e expresse em coordenadas retangulares

a) $2i$

b) $1 - \sqrt{3}i$.

26. Em cada caso, encontre todas as raízes em coordenadas retangulares e exiba elas como vértices de um certo polígono regular. Além disso, identifique a raiz principal:

a) $(-1)^{1/3}$

b) $8^{1/6}$.

27. Encontre os quatro zeros do polinômio $z^4 + 4$, um deles sendo $z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$. Então, use estes quatro zeros para fatorar $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

28. Mostre que se c é qualquer raiz n-ésima da unidade, então

$$1 + c + c^2 + ... + c^{n-1} = 0.$$

29. Mostre que a fórmula de Bhaskara usual resolve equações quadráticas complexas:

$$az^2 + bz + c = 0$$

onde $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{C}$. Ou seja, mostre que as soluções são dadas por

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde ambas as raízes quadradas devem ser consideradas quando $b^2 - 4ac \neq 0$. Use este resultado para encontrar as raízes da equação: $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$.