EXERCÍCIOS -2

(1) Resolva todos os exercícios do livro texto e exercícios deixados na sala de aula.

(2) Mostre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço metrico completo com a metrica

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}.$$

(3) Seja $\epsilon > 0$ e $f(x) = e^{-\epsilon|x|^2}$. Mostre que $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\epsilon}}$.

(4) Valor principal de $\frac{1}{x}$, denotado por $p.v.\frac{1}{x}$ é definido por

$$p.v.\frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mostre que $p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Também calcule a transformada de Fourier de seguinte distribuições:
(a) $p.v.\frac{1}{x}$ e (b) $\partial^\alpha \delta$.

(5) Calcule a transformada de Fourier de $sgn(x)$ e $\chi_{(-a,a)}$.

(6) Mostre que $(\log|x|)' = p.v.\frac{1}{x}$ no sentido de distribuição.

(7) Mostre que $\delta \in H^s$ sss $s < -\frac{n}{2}$.

(8) Seja $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial com coeficientes constantes. Mostre que $P(D) : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)\ \forall\ s \in \mathbb{R}$.

(9) Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $\varphi f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\varphi f\|_s \leq C \|\langle\cdot\rangle^{|s|}\widehat{\varphi}\|_{L^1} \|f\|_s.$$

(10) Mostre que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para toda $s \in \mathbb{R}$.

(11) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave com suporte compacto. Mostre as seguintes:
(a) $\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|xf\|_{L^2}\|f'\|_{L^2}$.
(b) $\|f\|_{L^2}^2 \leq C\|xf\|_{L^2}\|\xi\widehat{f}\|_{L^2}$.
Item (b) é uma versão de princípio de incerteza de Hisenberg. [Dica, use a identidade $|f(x)|^2 = |f(x)|^2 \frac{d}{dx}x$.]

(12) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função suave com suporte compacto. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ suave tal que para cada t fixo, $f(x,t)$ tem suporte compacto. Considere o problema de valor inicial associado a equação de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(x,t) + \frac{1}{2}\Delta\psi(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \psi(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Use a transformada de Fourier para mostrar que, formalmente a solução $\psi(x,t)$ é dada por

$$\psi(x,t) = \big(K(\cdot,t) \star \phi\big)(x) - i \int_0^t \big(K(\cdot, t-s) \star f(\cdot, s)\big)(x) ds,$$

onde

$$K(x,t) := \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

é solução fundamental da equação de Schrödinger linear.

(13) Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = f, \quad u_t = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{0.1}$$

(a) Mostre que a solução formal de (0.1) é dada por

$$u(t) = W'(t) \star f + W(t) \star g,$$

onde $W(t)$ e $W'(t)$ são definidos por

$$\widehat{W'(t)}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cos(t|\xi|), \quad \widehat{W(t)}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

(b) Mostre que se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\|W'(t) \star f\|_{H^s} \leq C\|f\|_{H^s} \quad \text{e} \quad \|W(t) \star g\|_{H^s} \leq C\sqrt{2}(1 + |t|)\|g\|_{H^{s-1}}.$$

(c) Se definir $u_t = v$, o problema (0.1) pode ser escrito como

$$U_t(t) = AU(t), \qquad U(0) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$. Moste que (0.2) é globalmente bem-posto em $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, onde a derivada é calculada no seguinte sentido:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{U(t+h) - U(t)}{h} - AU(t) \right\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} = 0,$$

com $\|U\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} = \|u\|_{H^{s-1}} + \|v\|_{H^{s-2}}$.