EXERCÍCIOS -1

(1) Considere a equação de onda em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Para $f(x,t)$, C^1 em x e C^0 em t, use o princíipio de Duhamel para mostrar que

$$u(x,t) := \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\, dy\, ds$$

é solução C^2 de (0.1). Mais ainda, encontre a solução para

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x). \end{cases} \tag{0.2}$$

(2) Considere o problema de valor inicial/fronteira em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u + a(x) u_t = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

$a(x) \geq 0$. Moste que o funcional de Energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + |Du|^2 \, dx$$

é decrescente em t, e use-lo para mostrar que (0.3) possui a única solução classica.

(3) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u(x,t)$ solução suave de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^3 = 0 & \text{em} \quad \Omega \times [0,T] \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases} \tag{0.4}$$

(a) Deriva o funcional de Energia e mostre que ele é conservado no tempo. (Dica: multiplica a equação por u_t e intrega)

(b) Mostre que se $u|_{t=0} = 0 = u_t|_{t=0}$ para $x \in \Omega$, então $u \equiv 0$.

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $a(x,t)$, $f(x)$, $g(x)$ são suaves. Considera o problema valor inicial/fronteira

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + a^2(x,t) u_t - \Delta u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x) = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \\ u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.5}$$

Mostre que a norma L^2 da solução u é limitada $\forall\ t \in (0, +\infty)$. (Dica: multiplica a equação por u_t e integra sobre Ω para encontrar o funcional de Energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_t^2 + |Du|^2) dx.)$$