Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Teste 3

12 de abril de 2010

1. (5 pontos) Encontre uma solução para a equação de Laguerre[1]

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0,$$

onde λ é uma constante real. Para quais valores de λ você pode garantir que tal equação tem uma solução polinomial?

2. (5 pontos) Resolva a equação de Laguerre,

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0,$$

para $\lambda = 0$, exibindo duas soluções linearmente independentes em termos de séries de potências (generalizadas).

[1] Soluções desta equação têm papel importante no problema do átomo de hidrogênio em mecânica quântica. Os polinômios de Laguerre aparecem ainda como funções-base no método de integração numérica de Gauss-Laguerre.

1. $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0} (n+r) a_n x^{n+r-1} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(n-1+r) + \lambda\right] a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$\underline{n=0}$: $\quad r^2 a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r^2 = 0 \to r_1 = r_2 = 0$

$\underline{n \geq 1}$: $\quad n^2 a_n - \left[(n-1) - \lambda\right] a_{n-1} = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{n-1-\lambda}{n^2} a_{n-1}}$

$$a_1 = -\lambda a_0$$

$$a_2 = \frac{1-\lambda}{2^2} a_1 = \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{1^2 \, 2^2} a_0$$

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3^2} = \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)}{1^2 \, 2^2 \, 3^2} a_0$$

$$a_n = \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2} a_0$$

Assim, uma solução é

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2} x^n$$

Note que $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n-1-\lambda}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

assim esse série tem raio de convergência infinito

Pelas expressões acima, podemos garantir que $y_1(x)$ é um polinômio quando $\lambda = m$ é um <u>inteiro não negativo</u>.

Neste caso, $y_1(x)$ é um polinômio de grau m, denominado polinômio de Laguerre $L_m(x)$.

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$$
$$\vdots$$

② $$x y'' + (1-x) y' = 0$$

Vemos pelo ítem anterior ou por inspeção que

$$y_1(x) = 1$$

é uma solução para este caso. Como $r_1 = r_2 = 0$, temos que determinar uma segunda solução por outro método, como redução de ordem.

Para a equação acima. $P(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

$$\Longrightarrow \int P\,dx = \ln x - x \Rightarrow e^{-\int P dx} = \frac{1}{x} e^{x}$$

Com isso,
$$y_2(x) = \int \frac{e^{-\int P dx}}{(y_1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x} e^{x} =$$

$$= \int \frac{1}{x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) dx$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^n}{n}$$