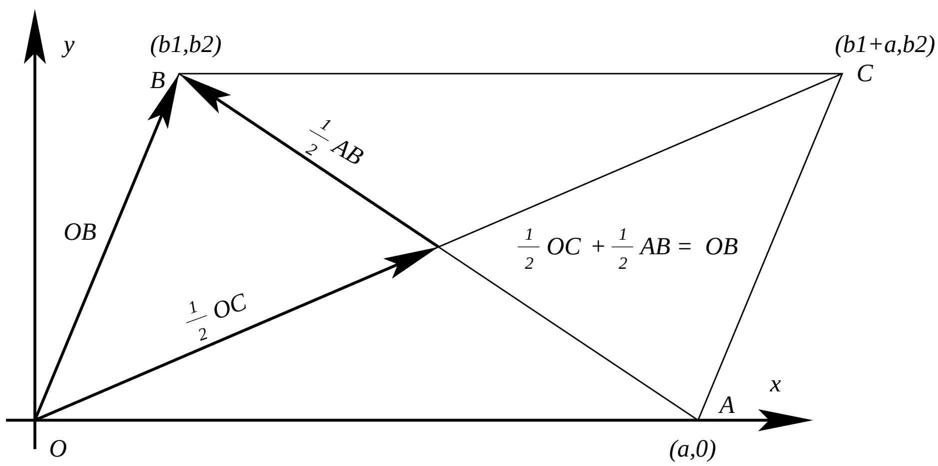
Nome: Gabarito RA: -1

Teste 2 - MA 141, turma $\underline{\chi}$, 31 de março de 2009.

É proibido usar calculadora. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas. Exemplos e contra-exemplos idênticos para alunos sentados em posições adjacentes serão considerados **muito** *suspeitos. Boa prova.*

1. (4.0 pts) Mostre que as diagonais de um paralelogramo se interceptam em um ponto que as divide ao meio. (Dica: você pode considerar, sem perda de generalidade, que seu sistema de eixos foi escolhido de maneira que três dos vértices do paralelogramo são dados por $O : (0, 0)$, $A : (a, 0)$ e $B : (b_1, b_2)$, com $b_2 \neq 0$.)

   Os vértices do paralelogramo são $OABC$. O vértice C tem coordenadas $(a+b_1, b2)$. As diagonais correspondem ao vetores $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a)\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath}$ e $\overrightarrow{OC} = (b_1 + a)\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath}$. Note que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$, estabelecendo o resultado, veja figura abaixo.



2. As afirmações abaixo dizem respeito a dois conjuntos de três vetores linearmente independentes $V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ e $W = \{\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3\}$ de $\mathbb{R}^5$ tais que a união $V \bigcup W$ gera $\mathbb{R}^5$. Prove as verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas.

   (a) (1 pt) Pode-se sempre construir uma base de $\mathbb{R}^5$ juntando-se os 3 vetores de V com dois vetores quaisquer de W.

   Falso. Contra-exemplo: $\vec{V}_1 = \vec{W}_1 = \hat{e}_1$, $\vec{V}_2 = \hat{e}_2$, $\vec{W}_2 = \hat{e}_3$, $\vec{V}_3 = \hat{e}_4$ e $\vec{W}_3 = \hat{e}_5$. O conjunto $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{W}_1, \vec{W}_2\}$ é L.D., portanto não pode ser base de $\mathbb{R}^5$.

   (b) (1 pt) Um dos vetores de W pertence ao subespaço gerado pelos vetores de V.

   Falso. Contra-exemplo: $\vec{V}_1 = \hat{e}_1$, $\vec{V}_2 = \hat{e}_2$, $\vec{V}_3 = \hat{e}_3$, $\vec{W}_1 = \hat{e}_4$, $\vec{W}_2 = \hat{e}_5$, $\vec{W}_3 = \hat{e}_1 + \hat{e}_5$. Nenhum vetor de W pertence ao subespaço gerado pelos vetores de V.

(c) (1 pt) Tomando-se dois vetores quaisquer de V e um de W, tem-se sempre um conjunto L.I.

Falso. Basta tomar $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ e $\vec{W}_1$ *do ítem a.*

(d) (1 pt) Tomando-se dois vetores quaisquer de W e um de V, nunca temos um conjunto L.I.

Falso. Basta tomar $\vec{V}_1$, $\vec{W}_2$ e $\vec{W}_3$ *do ítem a.*

(e) (1 pt) No conjunto $V \bigcup W$, sempre há subconjuntos de três vetores coplanares.

Falso. No conjunto: $\vec{V}_1 = \hat{e}_1$, $\vec{V}_2 = \hat{e}_2$, $\vec{V}_3 = \hat{e}_3$, $\vec{W}_1 = \hat{e}_4$, $\vec{W}_2 = \hat{e}_5$ e $\vec{W}_3 = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3$*; não há nenhum sub-conjunto de três vetores coplanares,* i.e., *três vetores L.D.*

(f) (1 pt) Se π_1 é um plano gerado por dois vetores quaisquer de V e π_2 um outro plano gerado por dois vetores quaisquer de W, então π_1 e π_2 nunca são paralelos.

Verdadeiro. Como $V \bigcup W$ *gera* $\mathbb{R}^5$*, há cinco vetores L.I. nessa união. Vamos supor, sem perda de generalidade, que sejam* $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{W}_1, \vec{W}_2\}$*. É impossível, portanto, escolher dois vetores L.I. de* W *que sejam coplanares com dois de* V*.*