Nome: GABARITO RA: ______

Prova 1 - MA 141 - Cursão, turma __, 28 de abril de 2009.

É proibido usar calculadora. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas. Boa prova.

1. (2,5 pontos) Considere os planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y = 1$ em $\mathbb{R}^3$. Determine a esfera C que passa pela origem e cujo centro pertence à intersecção entre π_1 e π_2 tal que C possui raio mínimo.

Seja $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ a equação da esfera de raio r com centro no ponto (x_0, y_0, z_0). Como a esfera passa pela origem, temos $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$. Seu centro, porém, pertence à reta r correspondente à $\pi_1 \cap \pi_2$. Para determinarmos a equação de r, basta notar que o ponto $(1, -1, 0)$ pertence simultaneamente a π_1 e a π_2 e que o vetor $\vec{V} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ é paralelo ambos os planos (portanto, é o vetor diretor de r.). A retar r tem, portanto, a seguinte equação paramétrica

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Como o centro de C pertence a reta r, temos

$$r^2 = f(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + (-1 + 2\lambda)^2 + \lambda^2 = 6\lambda^2 - 6\lambda + 2,$$

que possui um mínimo para $\lambda = 1/2$, correspondendo a uma esfera com $r^2 = 1/2$ e centro em $(1/2, 0, -1/2)$.

Outra maneira: Calcule a distância entre a origem e a reta r e determinar o ponto em r que realiza esta distância. Isso dá, respectivamente, o raio e o centro da esfera procurada.

2. (2,5 pontos) Considere, em $\mathbb{R}^3$, o ponto $P : (1, 2, 4)$, o plano $\pi : x + 2y + z + 2 = 0$ e o vetor $\vec{v} = (2, 1, 1)$. Determine:

(a) o(s) ponto(s) Q tal que a reta que passa por P e Q é paralela a $\vec{v}$ e $d(Q, \pi) = d(Q, P)$;

Sejam (x, y, z) as coordenadas de Q. A reta paralela a v e que passa por P e por Q tem equação

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

A distância entre Q e π é dada por $d(Q, \pi) = \left|\left|\text{Proj}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ}\right|\right|$, sendo $\vec{N} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ o vetor normal a π e $R = (0, -1, 0)$ um ponto de π. Tem-se

$$d(Q, \pi) = \frac{\left|\langle \vec{N}, \overrightarrow{RQ} \rangle\right|}{||\vec{N}||} = \frac{|5\lambda + 11|}{\sqrt{6}}$$

A distância entre P e Q é dada por $d(P, Q) = \sqrt{6}|\lambda|$, de onde se tem $|5\lambda + 11| = 6|\lambda|$, implicando em $\lambda = -1$ ou $\lambda = 11$, cujos pontos correspondentes são $Q = (-1, 1, 3)$ e $Q = (23, 13, 15)$.

(b) a reflexão de Q no plano π.

Como $\overrightarrow{RQ} = \text{Proj}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ} + \vec{w}$, $\text{Refl}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ} = -\text{Proj}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ} + \vec{w}$, implicando em $\text{Refl}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RQ} - 2\text{Proj}_{\vec{N}}\overrightarrow{RQ}$

3. (2,5 pontos) Considere o triângulo $\widehat{ABC}$ em R^3. Dadas as coordenadas dos vértices A, B e C, formule um critério que permita decidir se um ponto arbitrário P pertence ou não ao triângulo (*i.e.*, se o ponto P está contido no interior do triângulo ou se pertence a qualquer uma de suas arestas). *Um ponto P pertence ao triângulo se $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, com $\alpha + \beta \leq 1$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ (Veja figura abaixo). Portanto, o ponto P pertencerá ao triângulo se e somente se o sistema linear*

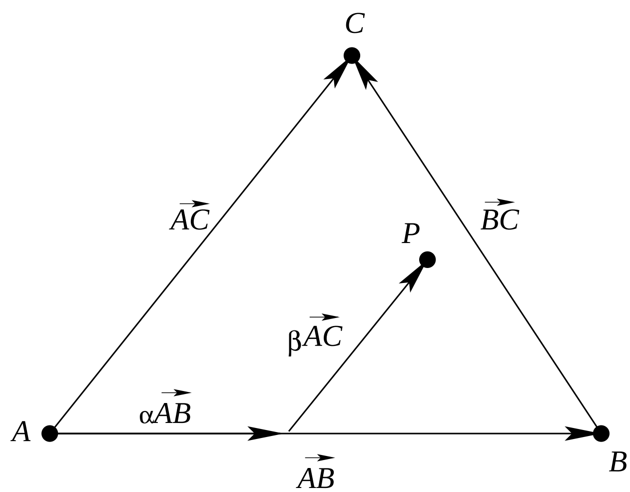

Figura 1: *O ponto P pertencerá à aresta $\overline{AB}$ se e somente se $\vec{AP} = \alpha\vec{AB}$, com $0 \leq \alpha \leq 1$ (idem para aresta $\overline{AC}$). Os pontos da aresta $\overline{BC}$ são aqueles tais que $\vec{AP} = \vec{AB} + \alpha\vec{BC}$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. Como $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, temos $\vec{AP} = \alpha\vec{AC} + (1-\alpha)\vec{AB}$. Os pontos P no interior do triângulo são aqueles para os quais $\vec{AP} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$, com $0 \leq \alpha \leq 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$.*

$$\left(\begin{array}{c|c} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\overrightarrow{AP} \right)$$

possuir solução satisfazendo $\alpha + \beta \leq 1$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$.

4. (2,5 pontos) Mostre que se um triângulo inscrito em uma circunferência de raio r tem um lado de comprimento igual a $2r$, então o vértice oposto necessariamente corresponde a um ângulo reto.

   Posicionando, respectivamente, os pontos A e B nas coordenadas $(-r, 0)$ e $(r, 0)$ e o ponto C em (x, y), tem-se $\overrightarrow{CA} = -(r+x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$ e $\overrightarrow{CB} = (r-x)\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$. Note que $\langle\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\rangle = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, já que o ponto C pertence a circunferência de raio r centrada na origem. Portanto, o vértice C, independente de sua posição, é um ângulo reto.

   Para uma prova geométrica elementar, veja a figura a seguir.

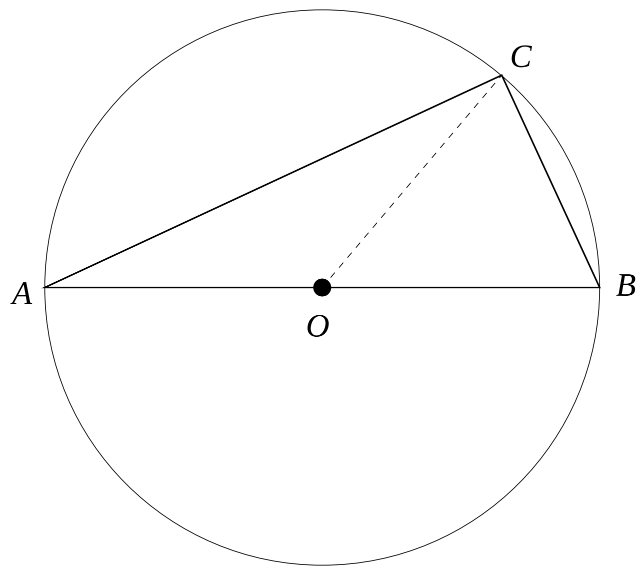

Figura 2: *Sejam O o centro da circunferência, α, β e γ, respectivamente, os ângulos dos vértices A, B e C do triângulo. Sabe-se que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Por outro lado, os triângulos $\widehat{OBC}$ e $\widehat{AOC}$ são ambos isósceles. Portanto, $\gamma = \alpha + \beta$, o que implica que $\gamma = \pi/2$.*