Nome: ____ RA: __________________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Prova 1

26 de abril de 2010

1. Considere equação diferencial
$$xy'' + xy' - \nu y = 0, \tag{$*$}$$
onde ν é uma constante real.
   (a) (2 pontos) Encontre uma solução não-trivial para $(*)$.
   (b) (1 ponto) Para quais valores de ν você pode garantir que $(*)$ tem uma solução polinomial?
   (c) (2 pontos) Encontre a solução geral de $(*)$ para $\nu = 1$ em termos de séries de potências (generalizadas).

2. Considere as coordenadas parabólicas cilíndricas u, v e z definidas (localmente) em $\mathbb{R}^3$ por
$$x = uv, \qquad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \qquad z = z.$$
   (a) (1/2 ponto) Mostre que as relações acima definem um sistema curvilíneo ortogonal e calcule os versores $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{z}$ correspondentes.
   (b) (1/2 ponto) Esboce este sistema no plano xy (tanto as curvas definidas pelas coordenadas no plano xy como os versores acima). Seu sistema é orientado positivamente?
   (c) (2 pontos) Mostre que a equação de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$, é separável neste sistema de coordenadas (não é necessário resolver as equações resultantes).

3. (2 pontos) Mostre que
$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{r}),$$
onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\delta(\boldsymbol{r})$ é a delta de Dirac em $\mathbb{R}^3$.

Extra. Seja S uma superfície suave e orientada em $\mathbb{R}^3$, com fronteira dada pela curva também suave $C = \partial S$, sendo a orientação em C aquela induzida por S.
   (a) (1/2 ponto) Mostre que
$$2\iint_S d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}.$$
   (b) (1/2 ponto) Qual a interpretação geométrica da integral do lado esquerdo? O que acontece quando S é fechada? E quando S é plana?

Fórmulas possivelmente úteis:

coord. curvilíneas ortogonais

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\hat{\boldsymbol{q}}_i$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right]$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\boldsymbol{q}}_1 & h_2\hat{\boldsymbol{q}}_2 & h_3\hat{\boldsymbol{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}$$

coord. cilíndricas

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

coord. esféricas

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix}$$