

8. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  tais que  $f(x) - g(x) = k$  ( $k$  uma constante).
- a. Se ambas as funções são deriváveis, prove que  $f'(x) = g'(x)$ . Reciprocamente, se  $f'(x) = g'(x)$  em  $(a, b)$ , então  $f(x) - g(x) = k$ , isto é,  $f(x) = g(x) + k$ .  
(Sugestão: aplique o teorema da média à função  $h(x) = f(x) - g(x)$  em dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  quaisquer do intervalo  $(a, b)$ .)
- b. Como  $f$  e  $g$  são contínuas em  $(a, b)$  (por quê?), é verdade que  $f(a) = g(b) + k$  e que  $f(b) = g(b) + k$ ? Justifique.

- \*9. Aplique o exercício anterior para mostrar que

$$\sin^2 x + \frac{\cos(2x)}{2} = k$$

onde  $k$  é uma constante e  $x$  é um número real qualquer. Quanto vale a constante  $k$ ?

10. Use o teorema da média para mostrar que a diferença entre as raízes quadradas de dois inteiros consecutivos maiores do que  $K^2$  é menor do que  $1/2K$ .
11. Mostre que  $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| < |x_1 - x_2|$ .
12. Determine, para cada função abaixo, os intervalos onde são monótonas crescentes ou decrescentes:
- a.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ ;      c.  $h(x) = \cos x - x$ .  
b.  $g(x) = x^3 + 2x - 5$ ;
13. Determine os pontos de máximos e de mínimos das seguintes funções:
- a.  $f(x) = 0,75x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ ;      c.  $f(x) = [x^2 - 3x + 2]/[x^2 + 2x + 1]$ .  
b.  $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2$ ;

- \*14. O peso fetal varia com o tempo de gestação. Se denotamo-lo por  $P$  e o tempo por  $t$ , propõem McDawell e Allen (*Proc. Soc. Exp. Bras. Med.*, 24:672, 1927) a seguinte equação

$$P(t) = a(t - b)^c$$

onde alguns valores para as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  estão expressos na tabela abaixo. A constante  $b$  representa a fase lag, isto é, o período durante o qual a placenta se fixa (*Nature*, 19 de agosto de 1967, vol. 215):

Espécie	$a \cdot 10^6$	$b$	$c$
Rato	1,0	8	3,0
Porco	0,9	19	2,9
Vaca	15,0	58	2,7
Macaco rhesus	5,0	35	2,4
Homem	7,0	41	2,7

- a. esboce a função  $P$ .  
b. se denotarmos o tempo do nascimento por  $t_n$  e  $P_n = P(t_n)$ , mostre que, para o homem

$$\frac{dP}{dt}(t_n) = \frac{2,7 P_n}{t_n - 41}$$

15. Tomaram-se  $n$  medições de uma certa grandeza  $x$  desconhecida, as quais foram denotadas por  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Tem-se que  $E_i = |x - x_i|$  representa o erro cometido na  $i$ -ésima medição. Consideremos agora a função

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

a qual denota a soma dos quadrados dos  $n$  erros. Mostre que essa função atinge seu mínimo no ponto

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

isto é,  $f'(\bar{x}) = 0$  e  $f''(\bar{x}) = 2n > 0$ .

16. O maior constituinte do corpo humano é a água, que é muito eficiente na dissolução de sais devido ao fato de suas moléculas combinarem-se com íons, dando origem a íons hidratados. A presença de íons de hidrogênio em soluções aquosas ( $H^+$  e  $OH^-$ ) é tal que a uma temperatura constante de  $25^\circ C$ , tem-se

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14}$$

Para que concentração de  $[H^+]$  a soma  $[H^+] + [OH^-]$  é mínima?

17. O peso específico da água a uma temperatura de  $t^\circ C$  é dado por

$$P(t) = 1 + at + bt^2 + ct^3, \quad 0 \leq t \leq 100^\circ C$$

sendo as constantes  $a = 5,3 \cdot 10^{-5}$ ,  $b = -6,53 \cdot 10^{-6}$  e  $c = 1,4 \cdot 10^{-8}$ . Qual é a temperatura na qual a água apresentará o maior peso específico?

18. Hoorweg estudou a estimulação elétrica de nervos através de descargas de um condensador. Descobriu que o potencial  $P$  necessário para provocar uma resposta mínima (contração muscular) relacionava-se com a capacidade  $C$  do condensador, segundo a fórmula

$$P = aR + \frac{b}{C}$$

onde  $R$  é a resistência (aqui suposta constante), enquanto que  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Se a capacidade  $C$  for medida em microfarads e o potencial  $P$  do condensador em volts, sabe-se, da Física elementar, que a energia  $E$  é expressa por  $E = 5CP^2$  ergs. Substituindo o valor de  $P$  nesta última equação, vamos ter

$$E = 5C \left( aR + \frac{b}{C} \right)^2 = 5a^2 R^2 C + 10abR + \frac{5b^2}{C}$$

Considerando  $E$  como uma função apenas de  $C$ , mostre que  $E$  será mínima quando  $C = b/aR$ . Qual o valor de  $E$  neste ponto? Esboce o gráfico de  $E$  para  $C \geq 0$ .

19. Cinquenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos  $t$  anos a população  $x$  desses animais é estimada por

$$x(t) = 50 \frac{t^2 + 6t + 30}{t^2 + 30}$$

Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

Em Fisiologia tem grande importância a avaliação do coeficiente de difusão do oxigênio através de tecidos com respiração ativa. Para descrever tal fenômeno, Warburg (*Biochim. Z.*, 142:317, 1923) propôs a equação

$$y = C - \frac{a}{2D} (Hx - x^2)$$

a qual relaciona a tensão de oxigênio com a distância  $x$  à superfície da fatia em qualquer ponto. Tem-se ainda que:

$y$  = tensão de  $O_2$  (em atmosferas) em um ponto situado a  $x$  cm a partir da superfície do tecido;

$C$  = tensão externa de  $O_2$  (em atmosferas);

$a$  = taxa respiratória do tecido (em ml de  $O_2$  consumidos/min/ml de tecido);

$H$  = a espessura da fatia de tecido (em cm);

$D$  = o coeficiente de difusão de  $O_2$  (em unidades de Krogh).

Mantendo-se constantes  $C$ ,  $a$ ,  $H$  e  $D$ , pede-se:

a. Estabelecer o domínio desta função.

b. Neste domínio, estimar os valores máximo e mínimo e para que valores de  $x$  eles ocorrem.

c. No(s) valor(es) de máximo(s), tem-se que  $y'(x) = 0$ ?

d. Tem-se  $y(0) = y(H) = C$ ; interprete este fato fisicamente.

e. Esboce o gráfico de  $y(a)$ .

f. Por que a equação  $\tilde{y} = C + a(Hx - x^2)/(2D)$  não serve para representar a concentração de  $O_2$  em um ponto no interior de uma fatia de tecido com respiração ativa?

g. Faz sentido  $y(H/2) < 0$ . Justifique.

21. Ward-Smith (Analysis of the aerodynamic performance of birds during bounding flight. *Math. Biosc.*, 68:140, 1984) sugere que a potência  $P$ , em watts, necessária para o voo horizontal de um pássaro, depende de sua velocidade  $v$ , e é dada por

$$P(v) = K_1 v^3 + \frac{K_2}{v}$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes positivas e dependem, entre outros fatores, da densidade do ar, da área da asa, do peso do pássaro etc. Para que velocidade  $v$  a potência é mínima?

22. O que é ponto de inflexão? Qual a sua importância? Se a derivada segunda de uma função se anula em um ponto, esse ponto é um ponto de inflexão? Por quê? Reciprocamente, pode ocorrer um ponto de inflexão sem que a derivada segunda se anule? Explique.

23. Nos Exemplos 4.9 e 4.10, qual a importância dos pontos  $C/2$  e  $t^*$ ? Qual a razão disso?

\*\*24. Considere a função definida por:

$$a. \quad f(x) = \begin{cases} (-x^4), & \text{se } x \leq 0 \\ 4x^3, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Mostre que  $x = 0$  é um ponto de inflexão.

$$b. \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que  $g'(0) = 0$ , mas que em  $x = 0$  não ocorre máximo, mínimo ou ponto de inflexão.

25. Determine os intervalos nos quais a função é convexa e côncava, bem como seus pontos de inflexão:

a.  $f(x) = x^3$ ;

b.  $f(x) = x^4$ ;

c.  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$ ;

d.  $f(x) = x^5 + 10x^2 + 5x - 2$ .

26. Uma certa infecção dissemina-se em uma população de suscetíveis, inicialmente igual a  $N$  indivíduos. Seja  $y(t)$  o número de indivíduos infectados. Vamos supor ainda que a população total seja composta apenas por estas duas classes. Sabe-se ainda que a doença se dissemina por contato direto entre as pessoas e quanto maior for o número de infectados e de suscetíveis, mais rapidamente a doença se espalhará. É razoável então supor que a taxa de variação da população doente seja proporcional ao produto  $y(N - y)$ , ou seja, existe uma constante positiva  $k$  tal que  $y'(t) = ky(t)[N - y(t)]$ .

a. Que acontece neste modelo quando o número de infectados no instante inicial for  $y(0) = 0$ ? Haverá infecção? (Veja o Exemplo 4.10.)

b. Se  $y(0) > 0$ , determine o valor de  $y(t^*)$ , onde  $t^*$  é o único ponto de inflexão da curva. O que representa o ponto de inflexão  $t^*$  em relação à disseminação da doença?

c. Segundo este modelo, toda a população suscetível contrairá a doença transcorrido um certo intervalo de tempo? Justifique.

27. No Exemplo 4.18 deste capítulo vimos que a reta  $y = 100$  é assíntota à curva  $y = y(x)$  e, por essa razão, estabeleceu-se que a titulação do complemento  $C$  seja feita com base na parte central da curva, definindo-se a unidade de complemento  $CH_{50}$  como sendo a quantidade de  $C$  que produz 50% de hemólise. Mostre que  $k = CH_{50}$ . Expresse o ponto de inflexão em função de  $CH_{50}$ .

28. Supõe-se que a saturação percentual de um fluido por um gás sob pressão seja dada pela função

$$f(x) = \frac{100Kx^c}{1 + Kx^c}$$

onde  $f(x)$  representa a saturação percentual,  $x$  a pressão parcial em torr do gás que está sendo dissolvido, enquanto que  $c > 1$  e  $K > 0$  são constantes. (Já estudamos um caso particular desta função no Capítulo 1, Exemplo 18, o qual abordava a saturação da molécula de hemoglobina dissolvida no plasma pelo oxigênio. Naquela situação,  $K = 0,00013$  e  $c = 2,7$ .)

a. Mostre que  $f(x)$  é sempre crescente.

b. Determine as regiões onde a função é convexa e côncava.

29. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a.  $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ ;

b.  $f(x) = x/(x^2 - 1)$ ;

c.  $f(x) = x^2/(x^2 - 1)$ ;

d.  $f(x) = 2x^3/(x^2 - 1)$ .

30. O fisiologista francês Poiseuille mostrou que o volume de um líquido com viscosidade  $\eta$  fluindo através de um tubo circular rígido de raio  $r$  e comprimento  $\ell$  é dado por

$$v = \frac{\pi r^4 (P_1 - P_2)}{8\eta \ell}$$

onde  $P_1 - P_2 = \Delta P$  é a diferença das pressões medidas nas duas extremidades do tubo. A resistência  $R$  é dada pela diferença de pressão dividida pelo volume.

- Mostre que  $R = \frac{8\eta \ell}{\pi r^4}$ .
  - Considere  $R$  como função de  $\ell$ ; esboce seu gráfico.
  - Considere agora  $R$  como função de  $r$ ; esboce seu gráfico. Que acontece com  $R$  quando reduzimos  $r$  pela metade?
  - Na sua opinião  $R$  é mais sensível a pequenas variações de  $r$  ou de  $\ell$ ? Explique.
31. *Regeneração do tecido hepático.* Segundo Spencer, R.P. e Coulombe, M.J., em Quantitation of hepatic growth and regeneration, *Growth*, 30:277-284, 1976, a regeneração do tecido hepático segue a seguinte equação

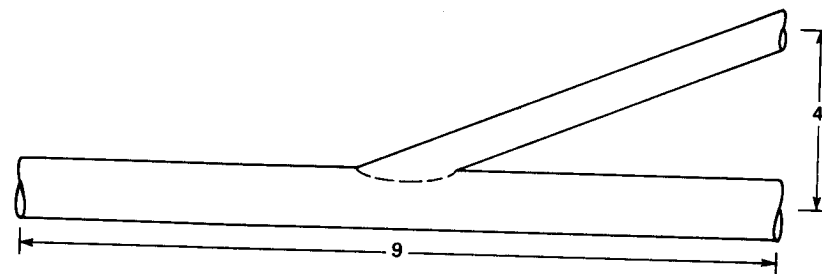
$$P(t) = \frac{A(t+a)^n}{b+(t+a)^n}$$

onde  $P$  representa o peso,  $a$ ,  $A$  e  $b$  são constantes positivas; e  $n$  um número inteiro maior que um.

- Em que instante a regeneração se processa mais aceleradamente?
  - O que representa a constante  $A$ ?
  - Qual o sentido da constante  $a$ ?
  - Faça um esboço do gráfico de  $P = P(t)$ .
- \*\*32. Muitas vezes a função  $C(t) = k[e^{-at} - e^{-bt}]$  é usada para representar a concentração de uma droga no sangue, quando esta não foi administrada na veia, só se difundindo na corrente sanguínea lentamente. São constantes  $a$ ,  $b$  e  $k$ , sendo  $a < b$ . Esboce o gráfico desta função, identificando seu ponto de máximo, pontos de inflexão, possíveis assíntotas etc.  
(Sugestão: veremos no próximo capítulo que a função exponencial  $y = e^x$  é tal que  $[e^x]' = e^x$ , onde  $e \approx 2,718$ . A menos de constantes multiplicativas, esta exponencial é a única função a ser igual à sua própria derivada! Naturalmente, trata-se de uma função injetiva.)

33. Considere a vazão  $V = V(r)$  estudada no Exemplo 4.13, que representa o volume de ar fluindo pela traquéia. Em um dado ponto da traquéia cujo raio é  $r$ , a área da seção transversal será  $\pi r^2$ ; logo, a velocidade  $f$  em cm/s será  $f = V/A$ , onde  $A$  é a área da seção transversal. Determine o raio  $r$  para o qual a velocidade do ar é máxima. Esboce o gráfico da velocidade  $f$  em função do raio  $r$ .
34. Com referência ao Exemplo 4.17, uma vez conhecido o ângulo de implante do enxerto que minimiza o esforço do coração, determinar a distância entre os pontos  $A$  e  $C$  da Figura 4.26 em função de  $\alpha_0$ ,  $d_0$ ,  $r_1$  e  $r_2$ .

35. Um cirurgião deseja implantar um vaso sanguíneo em uma artéria cujo diâmetro é igual a 8 mm, sendo o diâmetro do vaso igual a 5,6 mm. Sabendo-se ainda que o trecho da artéria de onde deverá partir o implante mede 9 cm e que o implante deverá atingir um sítio localizado a 4 cm acima de uma das extremidades do segmento arterial referido (veja o esquema abaixo), pede-se determinar o ângulo que ofereça a menor resistência. Em que ponto da artéria  $AB$  será realizado o implante? Justifique. Qual será o comprimento do vaso implantado?



36. No Exemplo 4.17 (enxerto de um vaso) determinou-se o ponto ótimo para o implante sob o ponto de vista de minimização da resistência ao fluxo, isto é, o esforço do coração. Expressou-se, naquela ocasião, a resistência total  $R$  como função do ângulo  $\alpha$ . Pede-se ao leitor reler o exemplo e exprimir  $R$  como função de  $x$ . Qual é o valor ótimo de  $x$ ?
37. No Exemplo 4.16 (enxerto de um vaso) foi determinado o ponto ótimo de implante visando minimizar a queda da pressão arterial. Nesse exemplo, a queda de pressão  $Q$  foi expressa como função de  $x$ . Pede-se ao leitor que agora exprima  $Q$  como função do ângulo  $\alpha$ . Conhecido  $\alpha$  determine  $x$ . Como se compara  $x = x_1$ , onde a queda da pressão deve ser mínima, com  $x = x_2$ , onde o esforço cardíaco deve ser o menor possível, mantendo-se os mesmos dados do problema?
38. Em Farmacologia estuda-se a habilidade com que muitas células respondem de maneira altamente seletiva a diminutas concentrações de um agente químico. Supõe-se que tais células sejam dotadas de receptores específicos em relação às moléculas do agente químico, chegando a responder a concentrações tão baixas como  $10^{-11}$  moles. Sabe-se que existe uma grande especificidade biológica, traduzida em uma marcante diferença de potência do agente químico para cada tipo de tecido ou órgão (por exemplo, adrenalina tem um grande efeito no músculo cardíaco, mas quase nenhum efeito nos músculos estriados).  
Suponhamos aqui que cada receptor se ligue a uma única molécula da droga. A equação de Langmuir estabelece que a fração do total de sítios ocupados pela droga é dada por
- $$y(x) = \frac{100x}{x + K}$$
- onde  $x$  representa a concentração da droga e  $K$  é uma constante positiva (constante de dissociação de equilíbrio).
- Esboce o gráfico de  $y$ .
  - Para que concentração a resposta dos receptores é mais sensível?