Deixamos aos cuidados do leitor o esboço da curva dada por $h(t)$, bem como a comparação entre os dados observados e aqueles previstos por $h(t)$ e o percentual de erro cometido. ■

Podem-se obter curvas periódicas complexas através do efeito combinado de várias curvas periódicas simples. É o caso, por exemplo, quando somamos as seguintes funções

$$f_1(x) = \text{sen } (2\pi\, x)$$
$$f_2(x) = \text{sen } (\pi\, x)$$
$$f_3(x) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2}\, x\right)$$

A primeira função, f_1, tem período um; a segunda, f_2, tem período dois; e a terceira, f_3, tem período quatro. Na Figura 3.24, estão esboçados os gráficos de f_1, f_2, f_3 e $h(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Atente o leitor que as três funções (f_1, f_2, f_3) têm apenas um ponto de máximo e outro de mínimo, enquanto que $h(x)$ tem três pontos de máximo e três de mínimo.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios que se seguem, a não ser em casos claramente expressos, supõem-se medidas angulares dadas em radianos.

1. Sem utilizar tabelas ou calculadoras, encontre os valores de:

a. sen $(\pi/12)$ e cos $(\pi/12)$;
b. sen $(5\pi/12)$, cos $(5\pi/12)$ e tg $(5\pi/12)$.

2. *a.* Determine todos os valores de x para os quais a função $f(x) = \text{sen } (3\pi\, x + \pi/2)$ assume os seguintes valores: 1, 1/2, 0, $-1/2$ e -1.
b. Idem para a função $g(x) = \cos\,(-x + \pi/5)$, bem como para $h(x) = \text{sen } (-2x + \pi/3)$.

3. Determine todos os valores de t para os quais $\Phi(t) = 1 + 2\cos\,(3t - 3\pi/4)$ assume valores inteiros.

4. Esboce o gráfico das seguintes funções, e calcule seus períodos e freqüências:

a. $y = \text{sen } (2\pi\, x)$;
b. $y = 7\cos\,(3x)$;
c. $y = \text{tg } (x/3)$;
d. $y = \cos\,(x - 2)$.

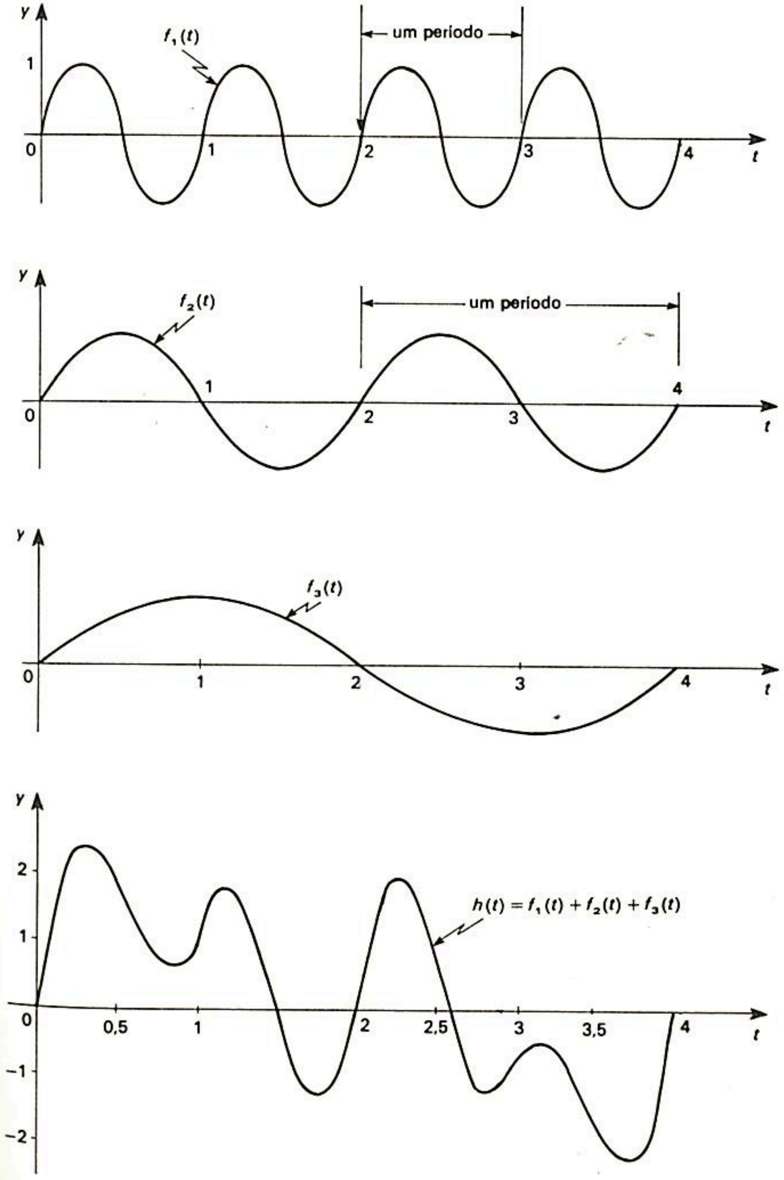


Figura 3.24 Efeito cumulativo da soma de funções periódicas.

5. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a. $y = x \text{ sen } (2\pi x)$;
b. $y = x^2 \text{ sen } (2\pi x)$;
c. $y = -x \text{ sen } (2\pi x)$;
d. $y = (2x + 3) \text{ sen } (2\pi x)$;
e. $y = \text{sen } (1/x)$, $x \neq 0$, e $y(0) = 0$.

6. Trace o gráfico de $y = \text{sen } t + \cos t$. Estime seu período T e sua amplitude A, bem como os pontos de acrofase.

7. Em geral, para uma função da forma $y = M + K \text{ sen } (at + b)$, o período é dado por: $T = 2\pi/|a|$. Qual a razão de se considerar o módulo (ou valor absoluto de a) na expressão de T?

8. Calcule o limite, quando existir:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{x}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 9x}{5x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{- \text{sen } x}$

e. $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}^2 (x - 1)}{x - 1}$

f. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \pi/2}{\cos (3x)}$

9. Conhecendo as derivadas do seno e do co-seno (conforme a Proposição (3)), calcule as derivadas de: tg x, cotg x, sec x e cosec x.

10. Determine a derivada y', se:

a. $y = x \text{ sen } x$;
b. $y = x^2 \text{ sen } (3x)$;
c. $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$;
d. $y = 2/\cos (7x)$;
e. $y = -2 \text{ sen } x \cos x$;
f. $y = \text{sen } (x^2 + 1)$;
g. $y = \cos^2 (x^2)$;
h. $y = \text{sen } (\cos (2x))$.

11. Determine a derivada y' nas expressões a seguir:

a. $x \text{ sen } (3x) = -y \cos (3x)$;
b. $y^2 \text{ sen}^3 (2x) + \cos^4 (-x) = 0$.

****12.** Considere a função real f dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}}{2} + \frac{\sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}}{2}$$

a. Prove que o domínio de definição desta função é o intervalo fechado $[-1, 1]$.
b. Seja $x = \cos \alpha$, onde $0 \leqq \alpha \leqq \pi$. Expresse $y = f(x)$ em função de α (justifique por que isso é possível). Distinga os casos:

i. $0 \leqq \alpha \leqq \pi/4$;
ii. $\pi/4 \leqq \alpha \leqq (3\pi/4)$;
iii. $(3\pi/4) \leqq \alpha \leqq \pi$.

c. Verifique que o gráfico de $y = f(x)$, no sistema de eixos ortogonais $x0y$, é formado por dois segmentos de retas e por um arco de círculo.

***13.** Considere uma *senóide* (veja a Equação 11) com termo constante nulo, isto é

$$g(t) = R \text{ sen } w(t + b)$$

Mostre, através de cálculo algébrico, que essa função goza das propriedades (*i*) e (*ii*), abaixo. Pede-se, também, para serem apresentadas as interpretações geométricas mencionadas nas propriedades.

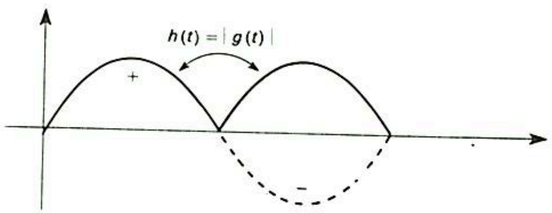
i. Se t_0 é um ponto (abscissa) de máximo ou de mínimo, então o gráfico é simétrico em torno da reta $t = t_0$.
ii. Se t_1 e t_2 são pontos de máximo e mínimo da senóide, respectivamente, tais que $|t_1 - t_2| = \pi/w$, segue-se que ela se anula em $t_0 = (t_1 + t_2)/2$.

***14.** Seja ainda a *senóide*

$$g(t) = R \text{ sen } w(t + b)$$

e considere

$$h(t) = |g(t)|$$



Verificar que $h(t)$ é simétrica em torno das retas $t = t_0$, tais que $g(t_0) = h(t_0) = 0$. Concluir, daí, que as partes positiva (+) e negativa (−) de uma onda da *senóide* $g(t)$, conforme a figura deste exercício, possuem a mesma conformação geométrica.

15. Seja a função dada por

$$g(t) = \cos t + 0{,}25 \cos (2t)$$

a. Verificar que a função assume o valor máximo $1 + 0{,}25 = 1{,}25$ nos pontos $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b. Por outro lado, verificar que ela assume o valor $-1+0{,}25=-0{,}75$ nos pontos $t=(2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

c. Ademais, tendo em vista que $\cos(2t)=2\cos^2 t-1$ e que $\cos^2 t+2\cos t+1 \geqq 0$, concluir que o valor mínimo da função é, exatamente, $-0{,}75$.

16. Construa o gráfico da função

$$y = 1 + \cos t + 0{,}25 \cos(2t)$$

Em que aspectos geométricos essa função difere de uma *senóide*? (*Observação*: utilize número suficiente de pontos, em cada intervalo de comprimento 2π, para o desenho do gráfico.)

***17.** Tendo em vista os resultados encontrados no Exercício 16, conclua que (sendo $R>0$) a função

$$h(t) = A + R\,[\cos w(t+b) + 0{,}25\cos(2w(t+b))]$$

assume: o valor máximo $A+5R/4$ nos pontos $t=2k\pi/w-b$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$; o valor mínimo $A-3R/4$ nos pontos $t=[(2k+1)\pi/w]-b$, $k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

(*Sugestão*: para os pontos de máximo, faça $2k\pi=\theta=w(t+b)$, ou seja, $t=2k\pi/w-b$; para os pontos de mínimo, faça $(2k+1)\pi=\theta=w(t+b)$, isto é, $t=[(2k+1)\pi/w-b]$.)

***18.** Supõe-se que em determinado lugar a temperatura média diária T (em °C) e a intensidade média I da radiação solar possam ser expressas em função do tempo s, em semanas, da forma como se segue

$$T = 10 + 12 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-15}{52}\right)\right]$$

$$I = 400 + 200 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{s-11}{52}\right)\right]$$

Determinar, a partir desses modelos, quais as datas aproximadas em que ocorrem, anualmente, os máximos (acrofases) da temperatura e da intensidade da radiação solar. Fornecer uma explicação coerente para a defasagem encontrada.

19. Sabe-se que $\cos[w(t+b)] = \cos wt \cos wb - \operatorname{sen} wt \operatorname{sen} wb$; conclua que (11), isto é, $y=M+R\operatorname{sen}[w(t+b)]$ pode escrever-se, sempre, na forma

$$y = M + P\cos wt + Q \operatorname{sen} wt \tag{11}$$

onde

$$P = R\cos wb \quad \text{e} \quad Q = R \operatorname{sen} wb$$

20. No problema precedente, mostrar que é possível expressar b e R como função de P e Q, a saber

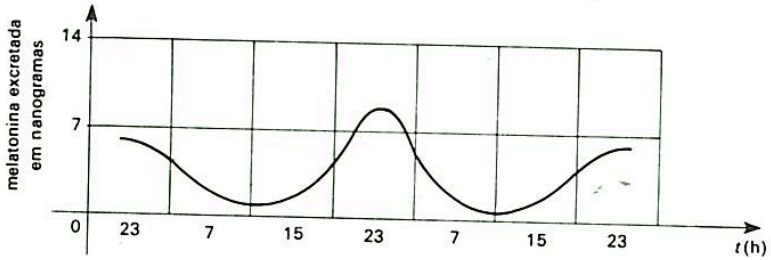
$$R = \sqrt{P^2+Q^2}$$

$$b = \begin{cases} [\operatorname{arc\,tg}(Q/P)]/w, & \text{se} \quad P>0 \\ \pi/w + [\operatorname{arc\,tg}(Q/P)]/w, & \text{se} \quad P<0 \end{cases}$$

admitindo-se os seguintes casos excepcionais: $b=\pi/2w$, se $P=0$ e $Q>0$; $b=3\pi/2w$, se $P=0$ e $Q<0$; b indeterminado, se $P=Q=0$.

21. Escreva as equações para a temperatura T e a intensidade da radiação solar I do Exercício 18 sob a forma (11), indicada no Exercício 19.

***22.** No artigo "Efeitos da Luz sobre o Corpo Humano", de R.J. Wurtman, publicado em *Scientific American*, julho de 1975, pp. 68-77, é referido que o ritmo e intensidade da luz influenciam a maturação e subseqüente atividade cíclica das gônadas sexuais de todos os mamíferos. Segundo o mesmo autor, o ritmo de secreção do hormônio melatonina descreve a seguinte função periódica (veja o gráfico abaixo)



Pede-se ao leitor para aproximá-la:

a. por uma senóide (essa aproximação é boa?);

b. por uma expressão envolvendo a soma de duas funções co-senos ou de duas funções senos, mais termo constante.

23. *a.* Esboce os gráficos das funções: $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$, dadas no Exemplo 3.10, em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas; $m(t)$, $n(t)$ e $m(t)+n(t)$ do mesmo exemplo.

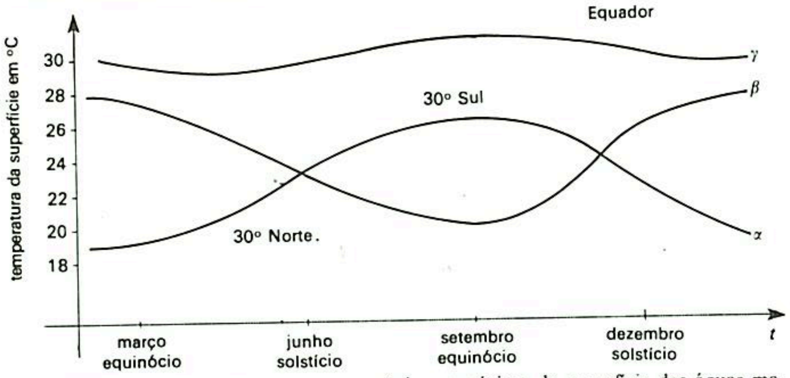
b. Determine em ambos os casos os pontos de máximo e de mínimo.

24. Considere a função

$$y = 2 + \cos t - 1/8 \operatorname{sen}(2t)$$

Construa seu gráfico e diga igualmente, sob quais aspectos geométricos ela difere de uma *senóide*.

30. A água é um dos principais constituintes dos seres vivos na Terra. Existe em grande abundância nos oceanos e mares e é distribuida através das chuvas em quase todas as regiões do planeta. As nuvens que trazem as chuvas são formadas devido à evaporação, principalmente, das águas dos oceanos e mares. Com relação ao processo de evaporação das águas, um dos principais responsáveis é a temperatura na superfície dos oceanos e mares. O gráfico deste exercício retrata a temperatura superficial das águas marítimas no Equador, a 30° de latitude Norte e Sul.



Observe o leitor que as temperaturas máxima e mínima da superfície das águas marítimas não coincidem com os extremos do ciclo solar, estando defasadas em relação ao Sol em cerca de 10 semanas. Ora, como a energia potencial das monções é determinada, em parte, pela diferença de temperaturas entre os hemisférios Norte e Sul, essa atinge seu máximo mais ou menos dois meses após os solstícios e seu mínimo, dois meses depois dos equinócios. Sabe-se ainda que a temperatura máxima superficial das águas é responsável por uma taxa máxima de evaporação, de modo que, nos ápices de energia potencial, o processo de evaporação é mais pronunciado, provocando chuvas mais fortes.

a. Desenvolva um modelo matemático de previsão de temperaturas, para ajustar-se a cada uma das três curvas de temperatura mostradas na figura.

b. Em relação à curva de temperatura 30° de latitude Sul, qual seria a função representando a temperatura do ciclo solar? Suponha que sua amplitude seja igual a uma constante A.

31. Um ciclista sobe uma encosta com inclinação de 2° a uma velocidade de 18 km/h. Considere sen $(2°) = 0{,}0349$ e cos $(2°) = 0{,}9994$. Com que velocidade, em metros por segundo, está aumentando sua altura? Se o ciclista e sua bicicleta pesam juntos 85 kg, e sabendo-se ainda que erguer um quilo à altura de um metro em um segundo é equivalente a realizar trabalho a uma taxa igual a $g = 9{,}8$ W, indaga-se quantos watts o ciclista está dispendendo ao manter sua velocidade constante, desprezando as forças de atrito e resistência do ar.

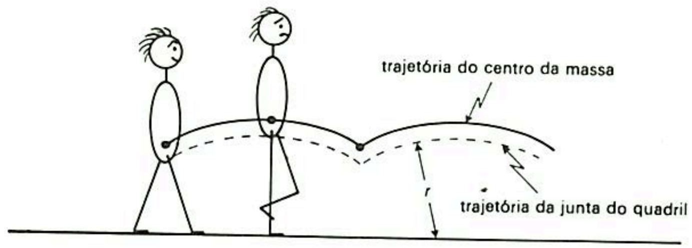
32. Se θ é um ângulo pequeno, tg $\theta \cong \theta$. Use esse fato para calcular a altura y de um objeto distante (uma árvore, um edifício, uma serra etc.), sabendo que a distância que separa o objeto do observador é igual a x. Mais especificamente, y é a altura a ser calculada sabendo-se que o objeto está a 1.200 m, tendo altura aparente igual a 0,5°.

33. Um indivíduo com visão normal pode ler caracteres gráficos com altura aparente de 1/12°. De acordo com o exercício anterior, sabe-se que a 7 m de distância do observador é possível ler caracteres com 1 cm de altura; a 70 m de distância a altura das letras deveria ser de 10 cm; a 21 m, mais ou menos igual a 3 cm. Uma pessoa que somente consegue ler a 7 m tipos que ela deveria ler a 42 m, é dita possuidora de uma *acuidade visual* igual a 7/42. Pergunta-se: a que distância pode uma pessoa de visão normal perceber outra cuja altura seja igual a 1,75 m?

34. O diâmetro da Lua compreende um ângulo igual a 0,5°. Sabe-se que a Lua está a uma distância média da Terra de $3{,}8 \cdot 10^8$ m. Qual é o diâmetro real da Lua? Quanto deve medir o menor objeto sobre a Lua, de modo a poder ser percebido da Terra por uma pessoa de visão normal, a olho nu, numa noite clara de lua cheia?

35. Trace o gráfico da função $g(t) = 21{,}16 - 1{,}92\cos[\pi/12\,(t-6)] + 2{,}23\,\text{sen}\,[\pi/12\,(t-6)]$ e coteje-o com os dados observados na Tabela 3.2, comparando os valores previstos por $g(t)$ com aqueles calculados através de $H(t)$ no Exemplo 3.3, bem como os erros cometidos entre as previsões de $g(t)$ e $H(t)$ e os valores observados. (Veja a Tabela 3.2.)

36. *Um modelo simplificado do andar humano.* Quando uma pessoa está andando, seu centro de massa ocupa uma posição fixa em relação ao seu tronco. Contudo descreve arcos de círculo de raio constante r, acompanhando a trajetória da junta do quadril. (Veja Alexander, R. M., Walking and running, *American Scientist*, *72*:348-354, 1984.)



Seja v a velocidade de deslocamento do indivíduo. Sabe-se que um ponto que se move ao longo de um arco de círculo de raio r tem aceleração dada por

$$A = \frac{v^2}{r}$$

na direção do solo. Justifique por que:

a. $A = v^2/r \leqq g$, onde g é a aceleração da gravidade. Conclua daí que a velocidade máxima de um indivíduo cuja perna meça 0,8 m não poderá ultrapassar 2,8 m/s, tomando-se $g = 9{,}8$ m/s^2.

b. Para um outro indivíduo cuja perna seja 5% maior, isto é, meça 0,84 m, de quanto aumentará sua velocidade máxima teórica?

c. A altura y do centro de massa ao solo é dada por $y(\alpha) = r\,\text{sen}\,(w\,\alpha)$, $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$; w é a freqüência do andar.

(*Observação*: o limite máximo de velocidade para o andar pode ser ultrapassado através do artifício de deslocar o centro de massa, como se pode observar em competições de marcha olímpica.)

37. Duas populações convivem em um mesmo *habitat* e as taxas de variação de cada uma delas são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_2 - 20.000 \\ \frac{dN_2}{dt^2} &= -N_1 + 20.000 \end{aligned} \qquad (*)$$

Sabendo-se que $N_1(0) = 20.000$ e $N_2(0) = 20.001$

a. mostre que $N_1(t) = \text{sen}\, t + 20.000$ e $N_2(t) = \cos t + 20.000$ satisfazem ao Sistema (*);

b. esboce em um mesmo sistema de coordenadas os gráficos de $N_1 = N_1(t)$ e $N_2 = N_2(t)$;

c. faça uma análise das oscilações que as duas populações guardam entre si.

Capítulo 4

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E OUTRAS APLICAÇÕES DA DERIVADA

Naturalmente, é um fato freqüente na Ciência que as coisas sejam complicadas demais para serem exatamente calculadas, e às vezes é preciso se contentar com um entendimento qualitativo aproximado.

F. Dyson

Não me importo em mentir, porém odeio a imprecisão.

Samuel Butler

Neste capítulo utilizaremos mais extensamente o conceito de derivada de uma função com a finalidade de resolver diversas questões de ordem prática, envolvendo problemas de otimização (nos termos anunciados no Capítulo 2), bem como a aproximação de funções e o estudo do traçado de curvas.

Pretendemos iniciar pelo exame da questão de como determinar o comportamento de uma função real em termos da ocorrência de máximos e mínimos e, ainda, de intervalos onde a função cresça ou decresça, a partir do estudo de suas derivadas.* Para tal, optamos por uma abordagem informal, com apelo à intuição do leitor e a considerações de ordem geométrica. Contudo, para começar, precisamos primeiro estabelecer alguns conceitos básicos.

Assim, os conceitos de máximo e de mínimo de uma função real são apresentados a seguir. O leitor poderá retornar ao Capítulo 1 (p. 25) para rever os conceitos de função estritamente crescente e estritamente decrescente.

* A derivada de uma função, quando existir, diz-se *primeira derivada*; a derivada desta, se também existir, é chamada de *segunda derivada*.