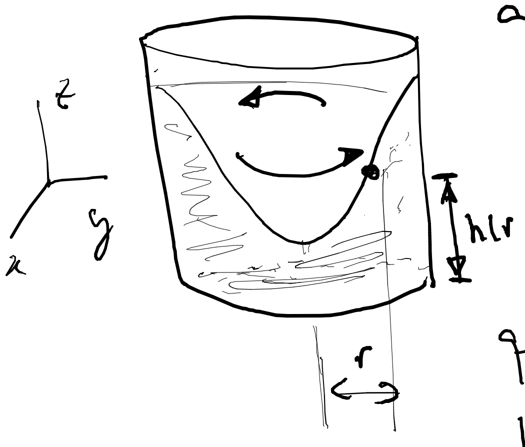
F078/MS601/MT621

Lista 3 (entrega até 22/09)

1. Considere um fluido ideal e homogêneo (ρ = cte) com velocidade

$$\vec{v} = k r^n \vec{e}_\theta,$$

que ocupa uma região do espaço com superfície livre $z = h(r)$. O fluido está em contato com a atmosfera e sob a ação da gravidade.



Encontre o perfil $h(r)$ e esboce alguns casos. Note que o perfil é qualitativamente diferente para $n \leq 0$ e $n > 0$. Discuta.

Dica: Muito cuidado com Bernoulli (que, no caso em que $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, só vale ao longo de streamlines!)

2. Vórtice de Rankine. Fluido nas mesmas condições do exercício anterior mas agora com $\vec{v} = v(r)\,\hat{e}_\theta$ e

$$v(r) = \begin{cases} \dfrac{\Omega a^2}{r}, & \text{se } r \geq a, \\ \Omega r, & \text{se } r < a. \end{cases}$$

Encontre o perfil $z = h(r)$ da superfície livre.

3. Seja D uma região simplesmente conexa do plano preenchida com um fluido ideal e homogêneo ($\rho =$ cte) e com velocidade normal prescrita em ∂D. Considere o funcional de energia cinética $E = \frac{1}{2}\int_D \rho v^2 \, dV$. Mostre que, nessas condições, o escoamento irrotacional é o que tem menor energia cinética possível.

4. Em um fluido ideal e homogêneo ($\rho = \rho_0$), inicialmente parado e ocupando todo o espaço, aparece de repente um buraco esférico de raio a. Mostre que o tempo decorrido até o buraco fechar é

$$T \cong 0,915 \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}\, a,$$

onde p_0 é a pressão no infinito.

<u>Dicas</u>: (i) Pela simetria do problema, $\vec{v} = v(r,t)\,\hat{e}_r$ e $p = p(r,t)$, com origem no centro do buraco.

(ii) Eq. da continuidade $\Rightarrow v = \frac{c(t)}{r^2}$.

(iii) Substituindo na eq. de Euler e integrando em r de $R(t)$ a ∞, onde $R(t)$ é o raio do buraco, pode-se obter uma expressão da forma $\frac{dV^2}{dR} = f(V^2)$, onde $V = \dot{R}$. Integrando tal expressão, obtemos $V = V(R)$, ie, $\frac{dR}{dt} = g(R)$.

(iv) Uma última integração $T = \int_0^T dt = \int_a^0 \frac{dR}{g(R)}$ nos dá o resultado procurado.