F078 / MS601 / MT621

Lista 2

(entrega em ~~04~~ 11/09, antes da aula)

1. Considere um escoamento planar e estacionário com um sumidouro na origem:

$$\vec{v}(\vec{r}) = -\frac{c}{r}\,\vec{e}_r \,, \quad c > 0 .$$

(a) Tal escoamento é incompressível?

(b) Calcule a vorticidade de tal fluido e seu tensor de deformação. Interprete fisicamente.

(c) Tal escoamento é estacionário no sentido euleriano? E no sentido lagrangiano?

(d) Calcule as pathlines e streamlines deste fluido.

(e) Calcule a evolução temporal de um elemento de fluido que se encontra em $r = r_0$ para $t = 0$. Quanto tempo deve passar para que este elemento "desapareça" em $r = 0$?

2. Escoamento confinado a células. Considere

$$\vec{v}(x,y) = (\text{sen}\,\pi x \cos \pi y,\ -\cos \pi x\ \text{sen}\,\pi y) .$$

(a) Mesmo que o do exercício anterior.

(b) " " " " " "

(c) " " " " " "

(d) " " " " "

(e) Faça um diagrama indicando onde a velocidade de deformação é máxima e onde a vorticidade é máxima.

3. <u>Escoamento de Couette</u>. Considere a região W entre dois cilindros concêntricos de raios R_1 e R_2, $R_1 < R_2$. Considere

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{r} + Br\right)\hat{e}_\theta ,$$

onde $A = -\dfrac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}$ e $B = -\dfrac{R_1^2\omega_1 - R_2^2\omega_2}{R_2^2 - R_1^2}$.

(a) Interprete ω_1 e ω_2 fisicamente.

(b) Mostre que $\vec{v}$ é soluçã das eqs. de Euler com $\rho =$ cte.

(c) Calcule a vorticidade de tal fluido e seu tensor de deformaçã. Interprete fisicamente.

4. Mostre que $A_{ijk} B_{ijl} = 0$ sempre que A (B) for simétrico (antissimétrico) em seus dois primeiros índices.

5. Mostre que $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}|^2 - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$.

6. <u>Acústica e propagaçã do som</u>. Considere o escoamento 1D de um fluido ideal (invíscido).

(a) Mostre que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

(b) Suponha que o escoamento obedece a uma equação de estado $p = p(\rho)$, com $p\rho^{-\gamma} = \text{cte}$, $\gamma > 0$. Considere pequenas perturbações $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, $\tilde{v}$ da forma

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \\ p = p_0 + \tilde{p}, \\ v = 0 + \tilde{v}, \end{cases}$$

onde ρ_0 e p_0 são a densidade e a pressão (constantes) em repouso (i.e, quando $v = 0$), e $|\tilde{\rho}| << |\rho_0|$, $|\tilde{p}| << |p_0|$. Linearize as equações em (a) (i.e, expanda tudo em p_0, ρ_0 e despreze termos de ordem 2 nas quantidades com o til). Mostre então que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \simeq 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \simeq -\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\rho}} \simeq \gamma \dfrac{p_0}{\rho_0}, \end{cases}$$

(note que o termo não linear na velocidade foi embora).

(c) Usando as equações de (b), mostre que $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$ e $\tilde{v}$ satisfazem a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

e determine c.