

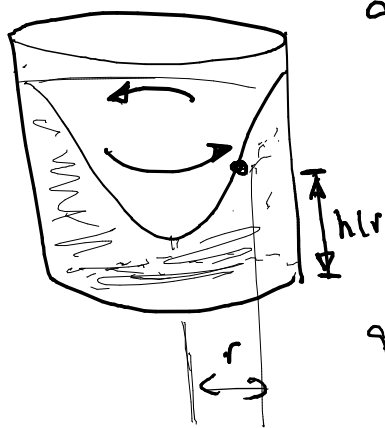
Lista 3

(entrega até 25/04, antes da aula)

1. Considere um fluido ideal e homogêneo ($\rho = \text{cte}$) com velocidade

$$\vec{v} = k r^m \vec{e}_\theta,$$

que ocupa uma região do espaço com superfície livre $z = h(r)$. O fluido está em contato com a atmosfera e sob a ação da gravidade.



Encontre o perfil $h(r)$ e esboce alguns casos. Note

que o perfil é qualitativamente diferente para $m \leq 0$ e $m > 0$. Discuta.

Dica: Muito cuidado com Bernoulli (que, no caso em que $\vec{v} \times \vec{\omega} \neq 0$, só vale ao longo de streamlines!)

2. Vórtice de Rankine. Fluido nas mesmas

condições do exercício anterior mas agora

com $\vec{v} = v(r) \vec{e}_\theta$ e

$$v(r) = \begin{cases} \frac{\Omega a^2}{r} & , \text{ se } r \geq a, \\ \Omega r & , \text{ se } r < a. \end{cases}$$

Encontre o perfil $z = h(r)$ da superfície livre.

3. Seja D uma região simplesmente conexa do plano preenchida com um fluido ideal e homogêneo ($\rho = \text{cte}$) e com velocidade normal prescrita em ∂D . Considere o funcional de energia cinética $E = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV$. Mostre que, nessas condições, o escoamento irrotacional é o que tem menor energia cinética possível.

4. Em um fluido ideal e homogêneo ($\rho = \rho_0$), inicialmente parado e ocupando todo o espaço, aparece de repente um buraco esférico de raio a . Mostre que o tempo de corrido até o buraco fechar é

$$T \approx 0,915 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0}} a,$$

onde ρ_0 é a pressão no infinito.

Dicas: (i) Pela simetria do problema, $\vec{v} = v(r,t) \vec{e}_r$ e $p = p(r,t)$, com origem no centro do buraco.

(ii) Eq. de continuidade $\Rightarrow v = \frac{c(t)}{r^2}$.

(iii) Substituindo na eq. de Euler e integrando em r de $R(t)$ a ∞ , onde $R(t)$ é o raio do buraco, pode-se obter uma expressão da forma $\frac{dV^2}{dR} = f(V^2)$, onde $V = \dot{R}$. Integrando tal expressão, obtemos $V = V(R)$, i.e., $\frac{dR}{dt} = g(R)$.

(iv) Uma última integração $T = \int_0^1 dt = \int_a^0 \frac{dR}{g(R)}$ nos dá o resultado procurado,