

Lista 1 (entrega em 21/03, antes da aula)

1. Faça um resumo (de no máximo

uma página) da secção 5.2 do livro

[Trittton DJ, Physical fluid dynamics, 2nd edition].

2. Mostre que $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ e $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$

3. Seja $M = (M_{ij})$ uma matriz 3×3 . Mostre que

$$\det M = \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$$

4. Mostre que

(a) $\epsilon_{ijk} \epsilon_{rsjk} = \delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}$

(b) $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ije} = 2 \delta_{ke}$

5. Use o exercício anterior para mostrar que

(a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

(b) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

6. Usando o tensor ϵ_{ijk} , mostre que

(a) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$

(b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

(c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

(d) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) +$
 $+ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$

(assuma que tudo é C^∞).

7. Seja \vec{c} um campo constante. Tomando $F_i = c_i \varphi$ e $F_i = \epsilon_{ijk} G_j c_k$ no teorema de divergência, mostre que (sob quais hipóteses?):

$$(a) \int_V \vec{\nabla} \varphi \, d\tau = \int_{\partial V} \varphi \vec{n} \, dS$$

$$(b) \int_V \vec{\nabla} \times \vec{G} \, d\tau = \int_{\partial V} \vec{n} \times \vec{G} \, dS$$

8. Mostre que A_{ij} e B_{ij} $= 0$ sempre que $A(B)$ for simétrico (anti-simétrico) em seus dois primeiros índices.

9. Mostre que $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{u}|^2 - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

10. Calcule e esboce algumas "pathlines" e "streamlines" para as distribuições de velocidades dadas por (onde $\vec{r} = (x, y)$):

$$(a) \vec{v}(\vec{r}, t) = (1, \sin t)$$

$$(b) \vec{v}(\vec{r}, t) = (x, e^t)$$