

Lista 9 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2022

1. Seja G o subconjunto das matrizes $2n \times 2n$ reais M que satisfazem

$$M^t J M = J,$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ e I_n é a matriz identidade $n \times n$.

- (a) Mostre que se $M \in G$ então $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = -JM^t J$ e $MJM^t = J$.¹
- (b) Mostre que G é um grupo (o chamado grupo simplético).
- (c) Determine a álgebra de Lie de G .
2. Seja g o produto interno em \mathbb{R}^n definido por $g(x, y) = x^t \eta y$, com $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.
- (a) Mostre que suas isometrias são dadas por $G = \{M \text{ matrizes } n \times n \text{ reais: } M^t \eta M = \eta\}$.
- (b) Mostre que se $M \in G$ então $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = \eta M^t \eta$ e $M \eta M^t = \eta$.
- (c) Mostre que G é um grupo.
- (d) Determine a álgebra de Lie de G .
3. Considere $\mathfrak{so}(3)$ com seus geradores usuais dados por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que $(J_k)_{ab} = -\epsilon_{kab}$.
- (b) Mostre que $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$.
4. Considere $\mathfrak{so}(4)$ com seus geradores usuais dados por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

¹Pode-se mostrar mais que isso: $\det(M) = +1$.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k,$$

$$[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k,$$

$$[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} J_k.$$