MS520

(2016)

Lista 2

(entrega em 11/10)

1. Dadas as coordenadas generalizadas $q^1, \dots, q^n$ de um espaço de configurações, considere a transformação genérica (dependente do tempo):

$$s^i = s^i(q^1, \dots, q^n, t) \quad ; \quad i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

Mostre que as equações de Lagrange são invariantes por (1), i.e., que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial s^k} = 0$, $k = 1, \dots, n$.

2. Dada uma lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ de um sistema físico, definimos

$$L' = L + \frac{d\vec{F}(\vec{q}, t)}{dt}$$

Mostre que L' define o mesmo sistema físico (isto é, que trajetórias satisfazem as equações de Lagrange para L se, e somente se, satisfazem para L').

3 (a) Obtenha a lagrangiana abaixo para o sistema de uma partícula com carga q e massa m sob a ação da força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

em termos dos potenciais eletromagnéticos:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}.$$

(b) Mostre que a hamiltoniana correspondente é dada por

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\phi.$$

4. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas M e m. Suponha que $M >> m$, de forma que M possa ser considerado fixo no centro de massa do sistema. Escolha um sistema de coordenadas $\vec{q} = (q_1, q_2)$ com centro em M e que gira com frequência angular Ω no plano x-y da órbita de m. Mostre que a Lagrangeana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{q}} + (\vec{\Omega} \times \vec{q})\right]^2 + \frac{GMm}{q}$$

onde $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Obtenha a Hamiltoniana.

(ex. tirado das notas do Marcus Aguiar)

5. Considere a espiral esférica (ou loxodromia)

$$\gamma(t): \begin{cases} x(t) = \cos t \,\operatorname{sech}(m t) \\ y(t) = \operatorname{sen} t \,\operatorname{sech}(m t) \\ z(t) = -\tanh(m t) \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$$

em S^2, onde $m \geq 0$.

(a) Desenhe $\gamma(t)$.

(b) Obtenha sua expressão em coordenadas esféricas (isto é, $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$).

(c) Encontre expressões para $\dot{\gamma}(t)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ de $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$ de $T_{\gamma(t)}S^2$.

(d) Seja $f: S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$.

Calcule $\dot{\gamma}(t)(f) = D_{\dot{\gamma}(t)} f$.

(e) Calcule o ângulo que tal curva faz com $\frac{\partial}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial}{\partial \phi}$. Interprete. Dica: faça $\cos\alpha = \frac{m}{1+m^2}$.

(f) Calcule o comprimento de tal curva.

Interprete.