MS520 (2016)

Lista 1 (entrega em 16/09)

1. Mostre que um pêndulo pode ser modelado pela equação diferencial

$$\ddot{x} + \operatorname{sen} x = 0$$

e desenhe seu diagrama de fases. Discute os possíveis tipos de movimento.

2. O vetor de Runge-Lenz. Considere uma partícula de massa m sob a ação de uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\hat{e}_r$.

(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = -m f(r)\, r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right),$$

onde $\vec{p}$ é o momento linear e $\vec{L}$ o momento angular.

(b) Mostre que para o problema de Kepler (em que $f(r) = -\frac{k}{r^2}$) o vetor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m k \frac{\vec{r}}{r}$$

é conservado e fica no plano do movimento. Esse é o chamado vetor de Runge-Lenz.

(c) Usando coordenadas r, θ mostre que

$$A r \cos\theta = L^2 - mkr$$

(d) Mostre que

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta},$$

onde $r_0 := \frac{L^2}{mk}$ e $e := \frac{A}{mk}$. Interprete detalhadamente.

3. Teorema de Bertrand. Considere novamente uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r)$. O objetivo deste problema é mostrar o teorema de Bertrand: os únicos potenciais centrais com a propriedade de que todas as órbitas limitadas são fechadas são o potencial de Kepler e o do oscilador harmônico.

(a) Mostre que um potencial central $V(r)$ tem uma órbita circular em $r = R$ se $V'(R) = \frac{l^2}{mR^3}$. Mostre que esta órbita é estável se

$$V''(R) + \frac{3}{R} V'(R) > 0 .$$

(b) Em uma órbita limitada não circular a partícula se encontra confinada na região $r_{min} \leq r \leq r_{máx}$. Os pontos em que r atinge um extremo são chamados apsides. A separação angular entre duas apsides consecutivas é denominada ângulo apsidal $\Delta\varphi$ (por exemplo, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ para uma órbita elíptica).

Mostre que o ângulo apsidal para órbitas quase-circulares é

$$\Delta\varphi = \pi \sqrt{\frac{V'(R)}{3V'(R) + RV''(R)}},$$

onde R é o raio da órbita circular.

(c) Mostre que os únicos potenciais centrais para os quais $\Delta\varphi$ é independente de R em (b) são da forma $V(r) = a r^{\alpha}$ ($\alpha \geq -2$ e $\alpha \neq 0$) e $V(r) = b \ln(r)$.

(d) Para os potenciais do ítem (c), mostre que $\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{2-\alpha}}$ onde $\alpha = 0$ corresponde ao caso logarítmico

(e) Para os casos em que $V(r) = a r^{\alpha}$ com $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$, i.e., para $\alpha > 0$ (com $a > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que $\lim_{E\to\infty} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(f) Para os casos em que $V(r) = -K r^{-\beta}$ com $V(r) \underset{r\to\infty}{\to} 0$, i.e., $0 < \beta \leq 2$ (com $K > 0$ para que a órbita seja fechada), mostre que

$$\lim_{E \to 0^-} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2-\beta}$$

(g) Mostre o teorema de Bertrand.

4. Considere uma partícula em queda livre vertical onde a distância inicial em relação ao solo x_0 não pode ser desprezada em relação ao raio da Terra R. Mostre que no limite em que $x_0/R << 1$ a solução da equação de movimento é

$$x(t) = (x_0 - \frac{R}{2})\cosh(\nu t) + \frac{v_0}{\nu}\sinh(\nu t) + \frac{R}{2}.$$

onde $\nu = \sqrt{2g/R}$. Calcule $x(t)$ para $\nu \to 0$.

5. Considere uma partícula de massa $m = 1/2$ movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Faça um esboço de $V(x)$ e discuta os tipos de movimento possíveis. Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e discuta sua estabilidade. Encontre explicitamente a equação da trajetória para o caso particular onde $E = 1/4$ e $x(0) = 0$.

(os exercícios 4 e 5 foram tirados das notas de aula do Marcus Aguiar).