Lista 5 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, novembro de 2020

1. Dadas as coordenadas generalizadas $q^1, \ldots, q^k$ do espaço de configurações de um sistema mecânico, considere a transformação genérica (dependente do tempo):

$$s^i = s^i(q^1, \ldots, q^k, t), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

Mostre que as equações de Euler Lagrange são invariantes por (1), isto é, que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

2. Considere a lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ de um sistema mecânico. Mostre que

$$L' = L + \frac{dF(\vec{q}, t)}{dt}$$

define o mesmo sistema físico (isto é, que uma trajetória satisfaz as equações de Euler-Lagrange para L se, e somente se, satisfaz para L').

3. Considere uma uma partícula com carga q e massa m sob a ação da força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

(a) Obtenha a lagrangiana abaixo para este sistema em termos dos potenciais eletromagnéticos ϕ e $\vec{A}$:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}.$$

(b) Mostre que a hamiltoniana correspondente é dada por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi.$$

4. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas M e m. Suponha que $M \gg m$, de forma que M possa ser considerado fixo no centro de massa. Escolha um sistema de coordenadas $\vec{q} = (q^1, q^2)$ com centro em M e que gira com frequência angular Ω no plano xy da órbita de m. Mostre que a lagrangiana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{q}} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{q}\right)\right]^2 + \frac{GMm}{q},$$

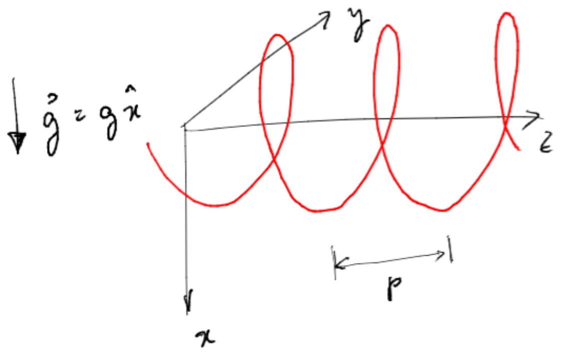
onde $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Obtenha a Hamiltoniana correspondente. (Exercício tirado das notas do Marcus Aguiar).

5. Uma conta de massa m se move sem atrito em um arame em forma de hélice com eixo de simetria na horizontal, sem massa, e sujeita a um campo gravitacional uniforme com aceleração vertical g. A hélice tem diâmetro d e passo p (veja figura abaixo).

   (a) Escreva a lagrangiana do sistema e ache suas equações de movimento.

   (b) Ache a hamiltoniana do sistema e a compare com a energia total. Ela é conservada?

   (c) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e os classifique (estável/instável). Determine a frequência para pequenas oscilações perto dos pontos de equilíbrio estáveis.



$$\begin{cases} x = \frac{d}{2}\cos\phi \\ y = \frac{d}{2}\sin\phi \\ z = \frac{\phi}{2\pi}p \end{cases}$$

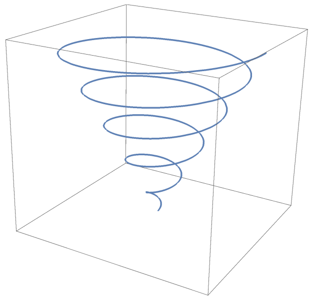
6. Considere um sistema análogo ao do exercício anterior, mas agora suponha que o corpo possua uma carga elétrica q e que exista um campo elétrico constante E orientado paralelamente ao eixo de simetria da hélice.

   (a) Repita o exercício anterior para este caso, discutindo os casos de campo fraco e forte (calcule a frequência de pequenas oscilações apenas no regime de campo fraco).

   (b) Resolva explicitamente as equações de movimento com as condições iniciais em que a partícula parte do repouso em um dos pontos mais baixos da hélice. Interprete fisicamente.

   (c) O que muda se ao invés de o corpo possuir carga elétrica, a hélice como um todo for submetida (por um agente externo qualquer) a uma aceleração constante a orientada paralelamente a seu eixo de simetria?

7. Considere uma partícula de massa m se movendo sem atrito e sob a ação da gravidade em uma espiral cônica, como mostra a figura abaixo. O cone que contém a espiral tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem.



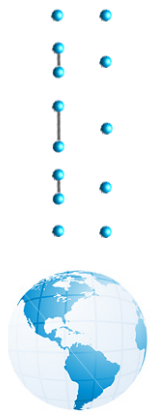
(a) Encontre as equação de movimento da partícula se a espiral roda em torno do eixo de simetria com velocidade angular constante ω.

(b) Para qual valor de ω a partícula permanece sempre em uma mesma altura z_0?

8. Considere uma partícula de referência de massa m caindo do repouso de uma altura R sob a ação da força de Kepler. Agora considere um haltere formado por duas partículas, de massa $m/2$ cada, presas entre si por uma barra sem massa de comprimento l.

   (a) Deixe esse haltere cair do repouso com altura inicial de seu centro de massa sendo também R (veja a figura abaixo à esquerda). Quem cai mais rápido, o haltere ou a partícula de referência?

   (b) Suponha agora que $l = l(t)$ depende do tempo e que inicialmente o haltere está fechado ($l(0) = 0$), se abre até um tamanho final L, e então novamente se fecha, levando para completar esse ciclo um tempo T. Assim, tanto em $t = 0$ quanto em $t = T$ o haltere é nada mais que uma partícula de massa total m (veja a figura abaixo à direita). Quem cai mais rápido, a partícula que se dividiu e se juntou ou a partícula de referência?



Exercício Extra:

Nosso objetivo aqui é resolver quantitativamente o exercício anterior, calculando a diferença entre as alturas do haltere oscilante e da partícula de referência ao final de um ciclo. Trabalhando sempre na ordem mais baixa possível de L e T que capture o efeito acima, mostre que

$$\delta r \approx -K \frac{L^2 T^2}{R^4},$$

onde a constante positiva K depende de G (constante da gravitação universal), M (massa central, que gera o campo) e de uma integral adimensional envolvendo $l(t)$.