Lista 3 - Mecânica Clássica

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2020

Notação: nesta lista usaremos a seguinte convenção para os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}{}^{k} = \tfrac{1}{2}\, g^{km} \left(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m} \right).$$

1. Considere o toro mostrado na figura abaixo (à esquerda):

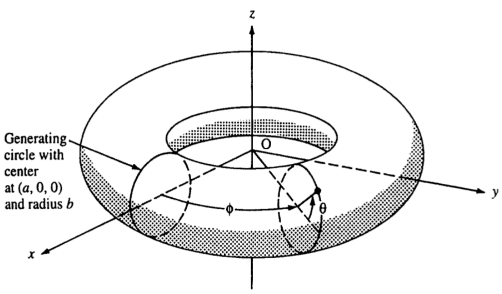
   (a) Parametrize tal superfície usando as coordenadas θ e ϕ da figura.

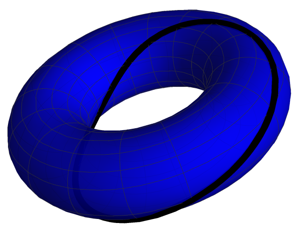
   (b) Obtenha expressões para os vetores $\boldsymbol{e}_i$ da base coordenada correspondente e para o tensor métrico g_{ij}.

   (c) Obtenha expressões para $\boldsymbol{e}^i$ e g^{ij}.

   (d) Usando o que você obteve no ítem (b) escreva a integral que corresponde ao comprimento da curva dada por $\phi = \phi_0$ que abraça o toro e a calcule. Faça o mesmo para a curva $\theta = \theta_0$.

   (e) Escreva a integral que corresponde ao comprimento de uma curva que dá uma volta no toro como na figura da direita (escolha uma).





2. Considere a espiral esférica (ou loxodromia) dada pela curva C parametrizada por $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S^2$, onde

$$x(t) = \cos(t)\,\mathrm{sech}(mt),$$
$$y(t) = \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sech}(mt),$$
$$z(t) = -\tanh(mt),$$

   com $-\infty < t < \infty$ e $m \geq 0$.

(a) Esboce C.

(b) Obtenha a parametrização acima em coordenadas esféricas (isto é, $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$).

(c) Encontre expressões para $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}\mathbb{R}^3$ e na base $\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right\}$ de $T_{\boldsymbol{r}(t)}S^2$.

(d) Calcule o ângulo que tal curva faz com $\frac{\partial}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial}{\partial \phi}$ para cada t. Interprete. Dica: faça $\frac{m}{1+m^2} = \cos\alpha$.

(e) Calcule o comprimento de tal curva. Interprete.

3. Considere a superfície de uma esfera S de raio a.

(a) Escreva o tensor métrico nas coordenadas esféricas usuais (θ, ϕ).

(b) Ache os coeficientes de conexão associados.

(c) Considere um vetor X_0 de coordenadas X_0^μ no ponto $p \in S$ de coordenadas $(\theta, \phi) = (\theta_0, 0)$. Escreva o problema de Cauchy correspondente a fazer o transporte paralelo de X_0 ao longo do paralelo $\theta = \theta_0$ dando uma volta completa em ϕ de 0 a 2π.

(d) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/2$. Interprete o resultado.

(e) Resolva este problema de Cauchy para $\theta_0 = \pi/3$. Interprete o resultado.

4. Dadas coordenadas locais (u^α) e $(u^{\alpha'})$, mostre que os coeficientes de conexão correspondentes se transformam como

$$\Gamma_{\mu'\nu'}{}^{\alpha'} = U^{\alpha'}_{\alpha} U^{\mu}_{\mu'} U^{\nu}_{\nu'} \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} - U^{\kappa}_{\mu'} U^{\gamma}_{\nu'} U^{\alpha'}_{\kappa\gamma},$$

onde $U^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}$ e $U^{\alpha'}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u^{\alpha'}}{\partial u^\mu \partial u^\nu}$. Use isso para mostrar explicitamente que as componentes da derivada covariante de um campo vetorial, $V^\alpha{}_{;\mu} = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha V^\nu$, transformam-se tensorialmente, isto é,

$$V^{\alpha'}{}_{;\mu'} = U^{\alpha'}_{\alpha} U^{\mu}_{\mu'} V^{\alpha}{}_{;\mu}$$

(claro que hé maneiras mais espertas de se fazer isso, mas o exercício é esse).

5. Mostre que

(a) $g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta\alpha}$;

(b) $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha} = \partial_\beta \ln \sqrt{|g|}$;

(c) $X^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} X^\mu\right)$.