Nome: ____ RA: __________________________

Mecânica Clássica X (F077/MS520) - Prova 2

dezembro de 2017

Ricardo Antonio Mosna

1. (3 pontos) Considere uma hamiltoniana de um sistema 1D dependente do tempo $H(q,p,t)$. Vamos fazer um *upgrade* da variável t para uma nova coordenada, juntamente com seu momento generalizado correspondente p_t. Definamos a hamiltoniana no novo espaço de fases (agora com 4 variáveis) por $\bar{H} = \bar{H}(q,t,p,p_t) = H(q,p,t) + p_t$. Assim, a hamiltoniana nas novas variáveis fica independente do novo parâmetro de "tempo", que denotaremos por τ.

   (a) Escreva as novas equações de movimento para $\dot{q}, \dot{t}, \dot{p}$ e $\dot{p_t}$, onde agora o ponto denota derivada com relação a τ.

   (b) Interprete o novo parâmetro de "tempo" τ e p_t em termos da dinâmica original.

   (c) A nova hamiltoniana $\bar{H}$ é conservada, já que independe de τ. Que valor ela assume?

   Obs.: Note que, assim como as variáveis antigas q e p, as "variáveis auxiliares" t e p_t vão precisar de condições iniciais em $\tau = 0$. Escolha estas condições iniciais de maneira que os itens (b) e (c) tenham as respostas mais elegantes possíveis.

2. (4 pontos) Considere uma hamiltoniana proveniente de uma força central,

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V(r), \tag{1}$$

   onde $r = \|\vec{r}\|$. Sejam L_i as componentes em coordenadas cartesianas do momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

   (a) Mostre que $\{L_i, H\} = 0$, $i = 1,2,3$.

   (b) Mostre que $\{L^2, H\} = 0$.

   (c) No contexto do teorema de Noether (versão hamiltoniana), qual é a simetria gerada pela quantidade conservada L_3? Aqui você deve fazer o cálculo explícito de $\vec{X}_{L_3}$ e então achar suas curvas integrais. Dica: coordenadas cilíndricas.

   (d) Estenda o resultado do item anterior para a quantidade conservada $l_{\vec{a}} = a^i L_i$, onde a^i são constantes. Dica: seja esperto.

3. (4 pontos) Considere o movimento oscilatório correspondente a uma bola quicando elasticamente no solo, sob a ação da gravidade. Sejam m e E a massa e energia da bola, respectivamente.

   (a) Desenhe curvas deste movimento no espaço de fases para vários valores de E (note que, no instante em que a bola toca o solo, seu momento mantém o módulo mas troca instantaneamente de sinal).

   (b) Ache as variáveis de ângulo e ação para este problema.

   (c) Determine a frequência das oscilações em função da energia.

   (d) Aplique o método de quantização de Bohr-Sommerfeld e compare o resultado com o que se obtém do espectro vindo da solução da equação de Schrödinger, $E_n = m^{1/3}\left[\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}(n - 1/4)\hbar g\right]^{2/3}$. Comente.