Nome: ______________________________ RA: ____________________

Mecânica Clássica X (F077/MS520) - Prova 1

17 de outubro de 2017

Ricardo Antonio Mosna

1. (3 pontos) Uma partícula de massa m se move, em uma dimensão, sob a ação do potencial

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{4a^4} \right),$$

com $V_0 > 0$.

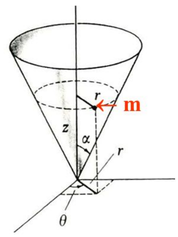
   (a) Esboce $V(x)$ identificando seus pontos de máximo e mínimo. Identifique todos os pontos de equilíbrio, estáveis e instáveis, e suas energias.

   (b) Esboce curvas no espaço de fases que sejam representativas do comportamento do sistema para várias energias indicando possíveis pontos de equilíbrio e separatrizes.

   (c) Resolva explicitamente a equação de movimento para o caso em que a energia é dada por $E = V_0$ e $x(0) = 0$. Quanto tempo a partícula leva para voltar a essa posição inicial?

   (d) Calcule o período de oscilação T associado à energia $E = \frac{3}{4}V_0$. Sua expressão deve ser da forma $T = \mathcal{I}\sqrt{\frac{ma^2}{V_0}}$, onde $\mathcal{I}$ é uma integral definida adimensional que você não precisa avaliar. Note que $\sqrt{\frac{ma^2}{V_0}}$ é a escala de tempo natural do sistema (é a única quantidade com dimensão de tempo que pode ser formada de a, V_0 e m).

2. (4 pontos) Considere uma partícula de massa m se movendo sobre um cone, sem atrito e sob a ação da gravidade, como mostra a figura ao lado. O cone tem ângulo de abertura 2α, eixo de simetria z e vértice na origem. Sejam r e θ dados pelas coordenadas cilíndricas usuais.



   (a) Ache as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$.

   (b) Mostre que existem soluções onde $r(t) = r_0$, r_0 constante. Qual é a frequência ω correspondente neste caso?

   (c) Esta órbita é estável? Se sim, qual é a frequência Ω para pequenas oscilações em torno do raio r_0?

   (d) Sob que condições temos $\Omega = \omega$?

   (e) Discuta detalhadamente (com figuras) o movimento para o caso em que $\alpha = 60°$.

3. (2 pontos) Considere o campo de forças originado por um fio homogêneo, localizado sobre uma curva parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s), z(s))$. Suponha que um elemento de linha do fio, localizado na posição $\boldsymbol{r}_0$, contribui com um potencial da forma $dV = f(\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|)\, ds$ (força central). O potencial resultante em um dado ponto $\boldsymbol{r}$ é desta forma dado por $V(\boldsymbol{r}) = \int f(\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|)\, ds$. Considere uma partícula teste sob a ação desse campo de força.

(a) Encontre três constantes do movimento se o fio é uma reta infinita localizada sobre o eixo z.

(b) Encontre duas constantes do movimento se o fio é uma hélice com eixo de simetria sobre o eixo z.

4. (1 pontos) Considere uma partícula de referência de massa m caindo do repouso de uma altura R sob a ação da força de Kepler. Agora considere um haltere formado por duas partículas, de massa $m/2$ cada, presas entre si por uma barra sem massa de comprimento l.

   (a) Deixe esse haltere cair do repouso com altura inicial de seu centro de massa sendo também R (veja a figura abaixo à esquerda). Quem cai mais rápido, o haltere ou a partícula de referência?

   (b) Suponha agora que $l = l(t)$ depende do tempo e que inicialmente o haltere está fechado ($l(0) = 0$), se abre até um tamanho final L, e então novamente se fecha, levando para completar esse ciclo um tempo T. Assim, tanto em $t = 0$ quanto em $t = T$ o haltere é nada mais que uma partícula de massa total m (veja a figura abaixo à direita). Quem cai mais rápido, a partícula que se dividiu e se juntou ou a partícula de referência?