Lista 4 - MA311CD, 2020

EDOs homogêneas lineares de coeficientes constantes.

Ricardo Antonio Mosna, outubro de 2020

1. Neste exercício vamos resolver todas as possíveis EDOs de segunda ordem lineares, homogêneas e com coeficientes constantes, isto é, EDOs da forma:

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0 \tag{1}$$

com $a \neq 0$.

(a) Mostre que não há perda de generalidade em escrever (1) como

$$y''(t) + 2\beta\,y'(t) + \gamma\,y(t) = 0. \tag{2}$$

Ache a equação característica correspondente e mostre que a solução geral de (2) essencialmente depende da relação entre β e γ, podendo ser separada em três grandes casos: $\gamma > \beta^2$, $\gamma = \beta^2$ e $\gamma < \beta^2$.

(b) Para $\gamma > \beta^2$, é conveniente escrever $\omega = \sqrt{\gamma - \beta^2}$ (note que ω é sempre positivo aqui). Ache duas soluções linearmente independentes de (2) em termos de ω e β. Faça esboços rápidos de suas soluções para β positivo, negativo e nulo.

(c) Para $\gamma < \beta^2$, é conveniente escrever $\kappa = \sqrt{\beta^2 - \gamma}$ (note que κ é sempre positivo aqui). Ache duas soluções linearmente independentes de (2) em termos de κ e β. Faça esboços rápidos de suas soluções para $\beta < -\kappa$, para $-\kappa \leq \beta \leq \kappa$ e $\beta > \kappa$.

(d) Finalmente, ache a solução geral para o caso em que $\gamma = \beta^2$. Faça esboços rápidos de suas soluções para β positivo, negativo e nulo.

2. A equação de um oscilador harmônico com amortecimento é dada por

$$y''(t) + 2\beta\,y'(t) + \omega_0^2\,y(t) = 0, \tag{3}$$

onde β é o coeficiente de amortecimento, que é sempre positivo, e $\omega_0 > 0$ é a frequência natural do oscilador (dada por $\sqrt{k/m}$, sendo k a constante da mola e m a massa do corpo). Interprete as possíveis soluções para este problema com base no exercício anterior. Note que na presença de amortecimento (isto é, sempre que $\beta > 0$), o sistema tende ao repouso para $t \to \infty$.

3. Resolva os PVIs dados por um oscilador harmônico amortecido, eq. (3), com $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e

(a) $\omega_0 = 1$, $\beta = 4$;

(b) $\omega_0 = 1$, $\beta = 1$;

(c) $\omega_0 = 1$, $\beta = 1/4$.

Faço um gráfico no Mathematica superpondo as três soluções obtidas acima.