Exercício 1. Encontre uma parametrização (juntamente com o intervalo) para o movimento de uma partícula que inicia seu trajeto no ponto $(a, 0)$ e passeia sob o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ da seguinte maneira:

a) uma vez no sentido horário;

b) uma vez no sentido anti-horario;

c) duas vezes no sentido horário

d) duas vezes no sentido anti-horário.

Exercício 2. Nos itens abaixo, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva no plano. Em cada caso, elimine o parâmetro t e esboce a curva.

a) $x = t + 1, \quad y = 2t - 1$

b) $x = t^2 + 1, \quad y = 2t^2 - 1$

c) $x = t^2, \quad y = t^3$

d) $x = 5\cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t$

Exercício 3. Encontre uma parametrização para as curvas abaixo

a) o segmento de reta que une $(-1,-3)$ e $(4,1)$;

b) a metade inferior da parábola $x-1=y^2$;

c) a semireta com ponto inicial $(-1,2)$ e que passa pela origem $(0,0)$.

Exercício 4. Calcule o comprimento das curvas abaixo:

a) $\alpha(t)=(\cos t,\ t+\operatorname{sen} t)$, $0\leq t\leq \pi$;

b) $\alpha(t)=\left(t^3,\ \frac{3t^2}{2}\right)$, $0\leq t\leq \sqrt{3}$;

Exercício 5. (O comprimento de uma curva não depende da parametrização) Parametrize o semicírculo de duas maneiras diferentes:

a) $\alpha(t)=(\cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t)$, $0\leq t\leq \pi/2$,

b) $\beta(t)=(\operatorname{sen}\pi t,\ \cos\pi t)$, $-\frac{1}{2}\leq t\leq \frac{1}{2}$.

Em cada caso, calcule o comprimento verificando que são iguais.

Exercício 6. Nos itens abaixo temos uma curva que representa a posição de uma partícula que se move no plano xy. Em cada caso, encontre a velocidade e a aceleração da partícula nos tempos dados. Faça um esboço da curva e dos vetores velocidade e aceleração sobre a curva.

a) $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{\pi}{2}$;

b) $\beta(t) = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)\vec{i} + \left(4\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\vec{j}$, $t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$;

(note que este é o círculo $x^2+y^2=16$

c) $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$;

d) $\alpha(t) = (t, t^2+1)$, $t = -1$, $t = 0$ e $t = 1$.

Exercício 7. Encontre o comprimento das curvas abaixo nos intervalos indicados.

a) $\alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, \sqrt{5}\, t)$ $0 \leq t \leq \pi$;

b) $\beta(t) = \left(t, 0, \frac{2}{3}t^{3/2}\right)$, $0 \leq t \leq 8$;

c) $\gamma(t) = (0, \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercício 8. Considere a hélice $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Então seu comprimento é $L = 2\pi\sqrt{2}$. Este é também o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 2π. Considere o cilindro que contém a hélice e está centrado no eixo z. Mostre como obter o quadrado cortando fora uma parte do cilindro e "desdobrando-o".

Exercício 9. O gráfico de $y = f(x)$ no plano xy automaticamente pode ser parametrizado por $\alpha(t) = (t, f(t))$. Mostre que se f é de classe C^2, então a curvatura de α é:

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{3/2}}.$$

Conclua que a curvatura é zero em um ponto de inflexão de f.

Exercício 10. Mostre que a curvatura da parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, é máxima no vértice e não possui valor mínimo.

Observação: como a curvatura de uma curva não muda se a curva é transladada ou rotacionada, este resultado vale para qualquer parábola.

Exercício 11. Mostre que a elipse $\alpha(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\, t)$, com $a > 0$, $b > 0$, possui maior curvatura sobre seu eixo maior e menor curvatura sobre seu eixo menor.

Isto é válido para qualquer elipse?

Exercício 12. Dada a hélice $\beta(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t, bt)$, com $a, b \geq 0$ e supondo que b está fixado, qual é o maior valor que a curvatura k desta hélice pode assumir (para este valor de b)?

Exercício 13. Mostre que a torsão da hélice

$\alpha(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t, bt)$, $a, b \geq 0$

é $\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Qual o maior valor de τ se a está fixado?
