Parte I

Exercício 1. Para as funções abaixo, encontre uma fórmula para a soma de Riemann obtida dividindo-se o intervalo $[a, b]$ dado em n subintervalos de comprimentos iguais e usando o extremo direito de cada subintervalo. Então, tome o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para calcular a área sob a curva no intervalo $[a, b]$.
a) $f(x) = 1 - x^2$ no intervalo $[0, 1]$;
b) $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[0, 3]$;
c) $f(x) = x + x^2$ no intervalo $[0, 1]$;
d) $f(x) = x^2 - x^3$ no intervalo $[-1, 0]$.

Exercício 2. Suponha que f e g sejam funções integráveis e que

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)dx = 6 \quad \text{e} \quad \int_1^5 g(x)dx = 8.$$

Calcule:
a) $\int_2^2 g(x)dx$;
b) $\int_1^2 3f(x)dx$;
c) $\int_2^5 f(x)dx$;
d) $\int_1^5 (4f(x) - g(x))dx$.

Exercício 3. Quais valores de a e de b que maximizam a integral

$$\int_a^b (x - x^2)dx?$$

Sugestão: onde o integrando é positivo?

Exercício 4. Quais valores de a e de b que minimizam a integral

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)dx?$$

Exercício 5. Obtenha uma estimativa por baixo e por cima para a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}dx.$$

Exercício 6. Obtenha uma estimativa por baixo e por cima para as integrais

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^2}dx \quad \text{e} \quad \int_{1/2}^1 \frac{1}{1 + x^2}dx.$$

Some estas duas integrais e verifique se você melhorou a estimativa do Exercício 5.

Exercício 7. Encontre dy/dx nos casos abaixo.
a) $y = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}dt$;
b) $y = x \int_2^{x^2} \operatorname{sen} t^3 dt$;
c) $y = \int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2 + 4}dt - \int_3^x \frac{t^2}{t^2 + 4}dt$;
d) $y = \left(\int_0^x (t^3 + 1)^{10} dt \right)^3$.

Exercício 8. Vamos dar uma demonstração alternativa de uma consequência importante do Teorema Fundamental do Cálculo.
a) Seja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ qualquer partição do intervalo $[a, b]$ e seja F tal que $F' = f$, onde f é contínua em $[a, b]$. Mostre que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

b) Aplique o Teorema do Valor Médio em cada subintervalo para mostrar que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para algum $c_i \in (x_i, x_{i-1})$. Conclua que $F(b) - F(a)$ é uma soma de Riemann de f em $[a, b]$.
c) Mostre que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exercício 9. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Exercício 10. Um polígono regular de n lados está inscrito em um círculo de raio r centrado na origem O, subdividindo este círculo em n ângulos iguais $2\pi/n$. Denote por A_n e C_n a área e o perímetro deste polígono respectivamente. Mostre que

$$A_n = nr^2 \operatorname{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n), \quad \text{e que } C_n = 2nr \operatorname{sen}(\pi/n).$$

Calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n},$$

deduza que

$$A = \frac{rC}{2},$$

onde A e C denotam a área e o períemtro do círculo de raio r, respectivamente.

Finalmente, assumindo que $A = \pi r^2$, deduza que $C = 2\pi r$.