Parte I

Exercício 1. Suponha que $y = f(x)$ seja uma função derivável e dada implicitamente pela equação

$$xy^2 + y + x = 1.$$

Mostre que

$$f'(x) = \frac{-1 - (f(x))^2}{2xf(x) + 1},$$

sempre que $x \in D_f$ com $2xf(x) + 1 \neq 0$.

Exercício 2. A função $y = f(x)$ é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Exercício 3. Determine a para que a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

possua uma única raiz real.

Exercício 4. Seja $n \geq 2$ um natural dado. Prove que $x^n - 1 \geq n(x - 1)$ para todo $x \geq 1$.
Sugestão: verifique que a função $f(x) = (x^n - 1) - n(x - 1)$ é estritamente crescente em $[1, \infty)$.

Exercício 5. Mostre que, para todo $x > 0$, tem-se que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}.$$

Exercício 6. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ (b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$ (c) $f(t) = t^2 + 1/t$
(d) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$ (e) $g(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ (f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$
(g) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ (h) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

Exercício 7. Esboce o gráfico de cada uma das funções do exercício anterior.

Exercício 8. Esboce o gráfico das funções abaixo seguindo o seguinte roteiro: explicite o domínio; determine os intervalos de crescimento e decrescimento; estude a concavidade e os pontos de inflexão; calcule os limites laterais em pontos que não estão no domínio mas são extremos de intervalos que compõe o domínio e em pontos onde a função for discontínua (se houver); calcule os limites $x \to \infty$ e $x \to -\infty$; determine ou localize as raízes da função.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
(c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$ (d) $f(x) = x^4 - 2x^2$
(e) $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$ (f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$

Exercício 9. Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro $2p$ é dado.

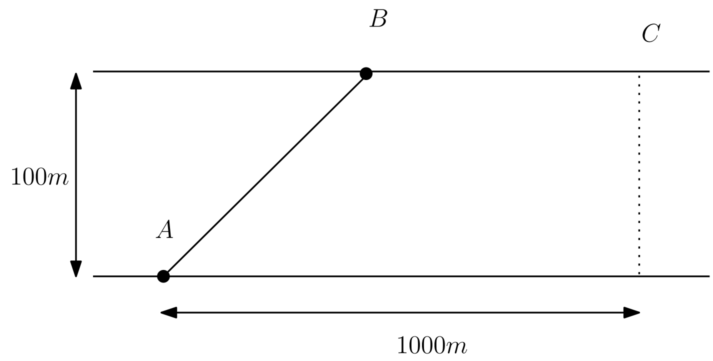
Exercício 10. Determine o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado seja máxima.

Exercício 11. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.

Exercício 12. Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

Exercício 13. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Trace uma tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima.

Exercício 14. Do ponto A, situado nas margens de um rio de $100m$ de largura, deve-se levar energia elétrica ao ponto C situado na outra margem do rio. O fio a ser utilizado na água custa R\$5 o metro, enquanto o que será utilizado fora custa R$3 o metro. Como deverá ser feita a ligação para que o gasto com os fios seja o menor possível (supondo as margens como sendoi duas retas paralelas).



Parte II: exercícios do livro do Spivak (quarta edição).

Exercícios do Capítulo 12: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 15, 18, 23 e 26.