Parte I

(1) Calcule e justifique

(a) $\lim_{x\to -9} 3$ (b) $\lim_{x\to 0} |5x-2|$ (c) $\lim_{x\to 1} x^3 - x^2 + 4x + 11$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{2-x}$ (e) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (f) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{3}}{x-3}$ (h) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$ (i) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$

(j) $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (l) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$ (m) $\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$

(2) Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{|x-1|}{x-1}$

(e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 2-(x-2)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(f) $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(g) $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde f é a função do item (f)

(3) Calcule

(a) $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$ (e) $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ (f) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$

(g) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ (i) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-1}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x^2-\operatorname{sen} x}$ (l) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{tg} x}{x+\operatorname{tg} x}$

(4) Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, onde f é dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(5) Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-1} & \text{se } x \ne 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$. (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x \ne 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$.

(6) Determine os pontos onde a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+1} & \text{se } x \ne -1 \\ 2 & \text{se } x = -1. \end{cases}$ é contínua. Justifique sua resposta.

(7) Seja f definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-3| \le 2|x-1|$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$. Justifique sua resposta.

(8) Seja f definida em $\mathbb{R}$ e suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M|x - p|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é contínua em p.

(b) Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

(9) Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

(10) A afirmativa

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \Rightarrow f \text{ contínua em } p$$

é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

(11) Pretende-se instalar numa fábrica de tubos plásticos um mecanismo que nos forneça um controle de precisão da área da região transversal do mesmo (visto que isso está diretamente associado à região do tubo e, portanto, com a resistência). O modo mais fácil de se fazer isso é medir o diâmetro do tubo $2r$, com isso a área da região será $A(r) = \pi r^2$. Quanto podemos errar no diâmetro de modo que a área da região transversal varie entre $4\pi - 0,1$ e $4\pi + 0,1$?

(12) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função f em $(p, f(p))$ nos seguintes casos:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 2$	(b) $f(x) = x^2 - x$ em $p = 4$	(c) $f(x) = x^3 - 2x^2$ em $p = -1$
(d) $f(x) = 1/x^2$ em $p = 1$	(e) $f(x) = \cos x$ em $p = \pi$	(f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $p = \pi/4$

(13) Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(1) = 0$.

(14) Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(15) Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(1)$ não exista.

(16) Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.

(17) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 1 \\ -x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de f.

(17) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$ e calcule $f'(1)$. Esboce o gráfico de f.

(18) Construa uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua em $\mathbb{R}$ e que seja derivável em todo os pontos, exceto em -1, 0 e 1.

(19) Seja r reta tangente ao gráfico de $f(x) = 1/x$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

(20) Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.