

Nome: _____

RA: _____

| Questões | Valores | Notas |
|-----------------|---------|-------|
| 1. ^a | 5 | |
| 2. ^a | 5 | |
| Total | 10 | |

ATENÇÃO: Cada resposta deve ser redigida com todos os detalhes. É vedado o uso de qualquer aparelho eletrônico durante o período de realização do teste, a menos que seja explicitamente autorizado.

1.^a Questão. Dados $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $n \in \mathbb{N}$, seja

$$J_n(a) := \int_0^a x^n e^{-x} dx.$$

a) [1.0] Verifique que

$$J_0(a) = 1 - \frac{1}{e^a}.$$

b) [1.5] Usando integração por partes, mostre que

$$J_n(a) = nJ_{n-1}(a) - \frac{a^n}{e^a}.$$

c) [1.5] Definimos a *função Gama* por

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} J_{n-1}(a).$$

Conclua do item a) que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e que, portanto,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad .$$

d) [1.0] Justifique a seguinte desigualdade:

$$\int_0^a x^n e^{-x} dx \leq \int_0^a x^n dx, \quad \text{para qualquer } a > 0,$$

e utilizando-a, conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(a) = 0, \quad \text{para qualquer } 0 < a < 1.$$

2.^a Questão.

a) [2.5] Calcule a integral

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} dx.$$

Sugestão: multiplique por

$$\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}.$$

b) [2.5] Encontre a área da região do plano limitada abaixo pela reta $y = 1$ e acima pelo gráfico de $y = \sqrt{1 + \cos x}$ com $0 \leq x \leq \pi/2$.

Bom Teste!