Nome: ______________________________ RA: ____________________

Métodos Matemáticos I (F520/MS550) - Exame

12 de julho de 2010

Resolva quatro questões dentre as seis apresentadas abaixo.

1. (2,5 pontos) Considere o campo vetorial dado, em coordenadas esféricas, por

$$\boldsymbol{F} = \frac{2P\cos\theta}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{P\mathrm{sen}\theta}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad r \geq P/2,$$

onde $P > 0$. Calcule $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ onde C é o segmento de reta orientado que liga A a B, onde A e B são dados por $A = P(0,0,-1)$ e $B = P(1,1,1)$ em coordenadas cartesianas.

2. (2,5 pontos) Determine a solução geral da equação diferencial

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$$

para $x \in (0,1)$.

3. (2,5 pontos) Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + y'(x) = f(x),$$

sujeita às condições de contorno $y(1) = y(e) = 0$.

   (a) Ache a função de Green para tal problema.

   (b) Resolva este problema para $f(x) = 1/x$.

4. Considere a equação diferencial $y'' - y' + \lambda y = 0$ no intervalo $[0,1]$.

   (a) (2 pontos) Determine os autovalores e autofunções correspondentes para o problema de Sturm-Liouville associado à EDO acima sujeita às condições de contorno $y(0) = y(1) = 0$.

   (b) (0.5 pontos) Escreva a condição de ortogonalidade entre essas autofunções.

5. (2,5 pontos) Seja P_n o n-ésimo polinômio de Legendre. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x)P_n(x') = \delta(x-x'),$$

$x, x' \in (-1,1)$. Dica: Lembre-se que os polinômios de Legendre formam um conjunto ortogonal completo, com $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$, etc.

6. (2,5 pontos) Prove que qualquer solução da equação de Airy, $y''(x) + xy(x) = 0$, tem um número infinito de zeros em $(0, \infty)$ e no máximo um zero em $(-\infty, 0)$.

Fórmulas possivelmente úteis:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right] \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta V_\varphi \end{vmatrix}
\end{aligned}
\qquad \textit{coord. esféricas}
$$
