Nome: GABARITO ______ R.A.: _

MA141 - Cursão **Exame Final** (14/07/2009)

1. Considere a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

   (a) (1 ponto) Determine seu centro e seu raio.
   $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$. *Raio* 3, *centro* $C = (1, -2)$.

   (b) (1 ponto) Determine as equações das retas tangentes à circunferência nos pontos de intersecção com o eixo x.
   Intesecção com eixo x: $y = 0$, $x^2 - 2x - 4 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{5}$. *Pontos de intersecção* $A = (1-\sqrt{5}, 0)$ *e* $B = (1+\sqrt{5}, 0)$. *Vetor tangente no ponto A:* $\vec{V}_A = 2\hat{\imath} + \sqrt{5}\hat{\jmath}$ $(\vec{V}_A \cdot \overrightarrow{CA} = 0)$, *no ponto B:* $\vec{V}_B = 2\hat{\imath} - \sqrt{5}\hat{\jmath}$. *Equações das retas: ponto A:* $\overrightarrow{PA} = \lambda \vec{V}_A$, *ponto B:* $\overrightarrow{PB} = \lambda \vec{V}_B$.

   (c) (1 ponto) Determine a(s) equação(ões) das parábola(as) que passa(m) pelos pontos de intersecção entre a circunferência e os eixos coordenados.
   Os pontos de intersecção com o eixo y $(x = 0)$ *são* $C = (0, -2-2\sqrt{2})$ *e* $D = (0, -2+2\sqrt{2})$ *Uma parábola genérica tem equação*

   $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

   com $4ac = b^2$. *Supondo-se* $a \neq 0$, *tem-se, após dividirmos por* a,

   $$x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0,$$

   com $b'^2 = 4c'$. *Os coeficientes* c', d', e', *e* f' *podem ser determinados pela exigência que a parábola passe pelos pontos* A, B, C, *e* D:

   $$\begin{aligned} \text{Ponto } A: &\quad (1-\sqrt{5})d' + f' = -(1-\sqrt{5})^2 \\ \text{Ponto } B: &\quad (1+\sqrt{5})d' + f' = -(1+\sqrt{5})^2 \\ \text{Ponto } C: &\quad (2+2\sqrt{2})^2c' - (2+2\sqrt{2})e' + f' = 0 \\ \text{Ponto } D: &\quad (2-2\sqrt{2})^2c' - (2-2\sqrt{2})e' + f' = 0 \end{aligned}$$

   Este sistema tem solução única. Das duas primeiras equações segue que $d = -2$ *e* $f = -4$. *Das duas últimas, tem-se* $c = 1$ *e* $e = 4$. *O coeficiente* b' *é determinado da condição* $b'^2 = 4c'$. *As parábolas são, portanto,*

   $$x^2 \pm 2xy + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

   Outra possível solução: Seja a família de cônicas dadas por

   $$C_\alpha : \ x^2 + \alpha xy + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

   $\alpha = 0$ *é a circunferência em questão. Observe que* **todos** *os elementos desta família possuem as mesmas intersecções com os eixos coordenados. As parábolas desta família correspondem às curvas com* $\alpha^2 = 4$. *Como 4 pontos são suficientes para se determinar de maneira única uma parábola (mostre!), qualquer parábola que passe pelos pontos* A, B, C *e* D *pertence a esta família.*

2. Considere os três planos abaixo:

   $\pi_1 : \ x + y - z = 0,$

   $\pi_2 : \ 2x + y - z = -1,$

   $\pi_3 : \ ax + y - z = 1.$

   (a) (1 Ponto) Determine o valor de a tal que eles se interceptem numa reta e obtenha sua equação paramétrica.

   (b) (1 Ponto) Calcule a distância entre esta reta e o eixo x.

   (c) (1 Ponto) Determine os pontos que realizam esta distância.

   (a) $a = 0$, *pois nesse caso a primeira equação é a soma da segunda e da terceira. A equação da reta correspondente a* $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ *será* $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$.

(b) Seja s a reta correspondente ao eixo x e t a reta da intersecção em questão. $A = (0,0,0) \in s$ e $B = (-1,1,0) \in t$. Seja v o vetor diretor de s e w o vetor diretor de t. $v \times W = (0,-1,1) \equiv z$. $d = |\text{Proj}_z \vec{AB}| = 1/\sqrt{2}$.

(c) $(-1,0,0)$ e $(-1,1/2,-1/2)$.

3. Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas. As escolhas devem ser justificadas. Contra-exemplos são sempre aceitos e benvindos. Para os primeiros 8 ítens, considere o sistema linear $AX = B$, sendo A uma matriz com n linhas e m colunas ($A \in R^n \times R^m, X \in R^m, B \in R^n$).

   (a) (0.25 ponto) Se $m > n$, o sistema *sempre* tem soluções.
   Falso. Contra-exemplo: O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   não tem nenhuma solução.

   (b) (0.25 ponto) Se $m = n$, A é invertível.
   Falso. Contra-exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) (0.25 ponto) Se as colunas de A são linearmente dependentes, o sistema *nunca* tem solução.
   Falso. Contra-exemplo: O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   corresponde a um plano em R^3.

   (d) (0.25 ponto) Se as colunas de A são linearmente independentes, o sistema *sempre* tem solução única.
   Falso. Contra-exemplo: O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   não tem nenhuma solução.

   (e) (0.5 ponto) Se o conjunto formado pelas colunas de A e por B for linearmente independente, o sistema tem solução única.
   Falso. Neste caso, não há solução, pois B não pertence ao espaço gerado pelas colunas de A.

   (f) (0.5 ponto) Se o sistema homogêneo associado ($B = 0$) tem solução única, então o sistema original também tem solução única.
   Falso. O sistema original pode não ter solução, veja contra-exemplo do item (d).

   (g) (0.5 ponto) Se $m \geq n$, o local geométrico de R^m correspondendo a solução do sistema linear tem, no *máximo*, $m - n$ geradores.
   Falso. Veja contra-exemplo do ítem (c): $m - n = 1$, mas a solução é um plano (2 geradores).

   (h) (0.5 ponto) O sistema somente tem solução se o vetor B pertencer ao subespaço de R^n gerado pelas colunas de A.
   Verdadeiro.

   (i) (0.5 ponto) O lugar geométrico em $\mathbb{R}^2$ determinado pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde a, b, c, d, e, f são constantes reais, pode ser uma curva (unidimensional).
   Verdadeiro.

(j) (0.5 ponto) O lugar geométrico em $\mathbb{R}^3$ determinado pela equação $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz + gx + hy + iz + j = 0$, onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são constantes, é sempre uma superfície (bidimensional).

Falso. Contra-exemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *é um único ponto.*

4. (2 Pontos) Quantos pontos, no mínimo, são necessários em R^2 para se determinar de maneira única uma cônica genérica? Justifique.

São necessários 5 pontos. Cônica genérica: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. *Temos 6 coeficientes a serem determinados. Para cada ponto* $(x_i, y_i) \in R^2$ $i = 1 \ldots n$, *temos uma equação. Os coeficientes devem satisfazer o sistema linear:*

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0.$$

Para ser uma cônica genérica, o sistema o espaço de soluções do sistema deve ter dimensão 1. Neste caso, n *deve ser, no mínimo, 5.*