Lista de Exercícios – Programação Inteira

1) Resolva os problemas a seguir usando o método B&B

a) Max $z = 5x + 2y$
s.a $3x + y \leq 12$
$x + y \leq 5$
$x, y \geq 0$, x e y inteiros

b) Max $z = 2x + 3y$
s.a $x + 2y \leq 10$
$3x + 4y \leq 25$
$x, y \geq 0$, x e y inteiros

c) Max $z = 4x + 3y$
s.a $4x + 9y \leq 26$
$8x + 5y \leq 17$
$x, y \geq 0$, x e y inteiros

d) Max $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeito a :
$-x_1 + 2x_2 \leq 4$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 \leq 9$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ e inteiros.

e) min $z = 4x_1 + 5x_2$
sujeito a :
$x_1 + 4x_2 \geq 5$
$3x_1 + 2x_2 \geq 7$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ e inteiros.

2) Considere o problema da mochila abaixo:

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ s.a. & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 = 0 \text{ ou } 1 \end{array}$$

Usando o método Branch-and-bound determina a solução ótima do problema.

3) Considere o problema abaixo:

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 14 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

Usando o método Branch-and-bound determina a solução ótima do problema.

4) Considere o problema inteiro abaixo e sua respectiva resolução por relaxação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/12	1/12	5/2

Usando o método Branch-and-bound determina a solução ótima do problema.

4)Resolva o problema de programação inteira:

$Max\ 4x_1 + 2x_2$

sujeito a:

$x_1 + x_2 \le 5$

$-x_1 + x_2 \le 0$

$6x_1 + 2x_2 \le 21$

$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$ e inteiros

a) De forma gráfica.
b) Pelo Método *branch-and-bound, utilizando a estratégia de escolha de nó: Maior limitante superior (no nó raiz, ramifique na variável* x_1). Escreva detalhadamente cada sub-problema que está resolvendo e a árvore parcial do B&B a cada nó resolvido. ATENÇÃO: O nó 1 (a primeira relaxação linear) deve ser resolvido usando o algoritmo simplex (pode ser tabela), os demais nós devem ser resolvidos pelo método gráfica.

5) Exercícios de modelagem. Considere o problema de localização de armazéns cujo objetivo é escolher os armazéns que devem ser instalados para servir um conjunto de clientes. Neste modelo existem uma capacidade associada a cada local possível e uma procura associada a cada cliente. A procura dos clientes associados a um certo armazém não pode exceder a sua capacidade. O objetivo do problema é ainda satisfazer os pedidos a um custo global mínimo, que envolve os custos mensais da renda dos armazéns e os custos de transporte da mercadoria entre os armazéns e os clientes. Considere 4 possíveis armazéns (A,B,C e D) com capacidades de 35, 28, 22 e 28 respectivamente e com as rendas mensais indicadas na tabela. Existe um conjunto de 5 clientes (a,b,c,d, e e) que representam as procuras de 14, 12, 10, 12 e 8, respectivamente. Os custos de transporte unitários entre cada possível armazém e cada cliente são indicados na tabela.

	Rendas	Custos de Transporte					
		a	b	c	d	e	
A	50	2	5	1	2	5	35
B	32	4	4	9	1	4	28
C	28	1	8	5	6	2	22
D	36	7	1	2	1	8	28
		14	12	10	12	8	

Formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar qual o conjunto ótimo de armazéns a selecionar. Considere as variáveis x_{ij} a quantidade a ser transportada do armazém i até o cliente j. As variáveis binárias y_i assumem o valor 1 se o armazém i é selecionado e 0, caso contrário. Resolva o problema utilizando o Excel.

6)Considere o problema de localização apresentado no exercício 6 em que é necessário respeitar as seguintes restrições:

a) Dos locais C e D, exatamente 1 deve ser selecionado
b) A seleção do local A ou do local B implica na exclusão do local C.
c) A seleção do local A ou do local B implica a seleção do local D.

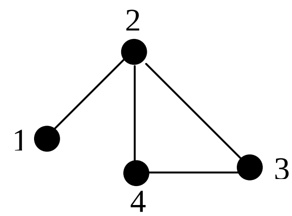
Formule um modelo de programação inteiro apropriado para a resolução deste problema. Resolva o problema utilizando o excel.

7) Exercícios (Disciplina: Programação Linear, Prof. Manoel Campelo Colaboração: Heider Augusto) Um grafo G é um par ordenado G = (V,E), onde V é um conjunto não vazio de pontos e E um conjunto de pares não ordenados de V. Cada elemento de V é chamado vértice, e de E aresta. Denotaremos por *n* a cardinalidade de V e por *m* a cardinalidade de E. Um grafo pode ser descrito graficamente representando cada vértice por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos correspondentes. Por exemplo:

G = (V,E) onde

V = {1,2,3,4}

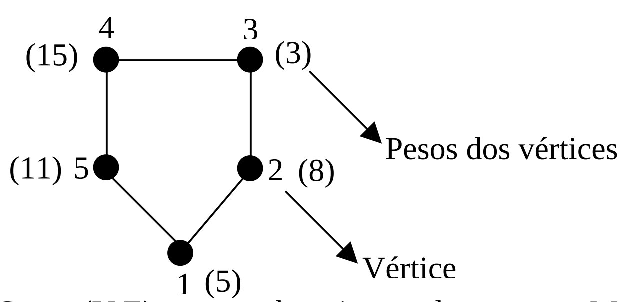
E = {(1,2),(2,3),(2,4),(3,4)}



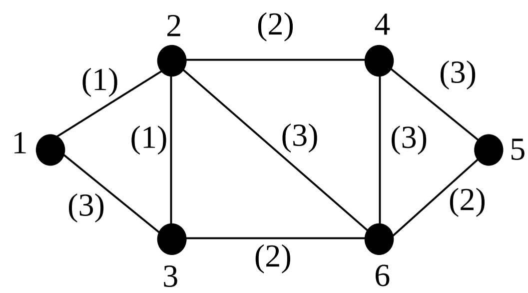
Dois vértices $u,v \in$ V são adjacentes se $(u,v) \in$ E. Para cada $v \in$ V, definimos E (v) como o conjunto de vértices adjacentes a v, i. e. E (v) = { u : $(u,v) \in$ E}. Uma aresta $(u,v) \in$ E é dita incidente a u e a v. Duas arestas são adjacentes se incidem a um vértice comum.

Questão: Para os problemas de 7.1 ao 7.5 elabore um modelo para o exemplo proposto e, depois, generalize o modelo para um grafo qualquer G=(V,E).

7.1) Dado um grafo G = (V,E), um subconjunto de vértices S $\subseteq$ V é um conjunto independente em G se quaisquer dois vértices em S não são adjacentes em G. Se a cada vértice $v_i \in$ V está associado um peso $w_i \in \Re$, define-se um conjunto independente de peso máximo em G como aquele cujo vértices totalizam a maior soma de pesos, entre todos os conjuntos independentes de G. Por exemplo, no grafo abaixo, o conjunto S={1,4} é um conjunto independente de peso 20. Sendo assim, modele o problema do conjunto independente máximo. Determine uma solução heurística para o problema (similar ao problema da programação de exames – material- heurística).

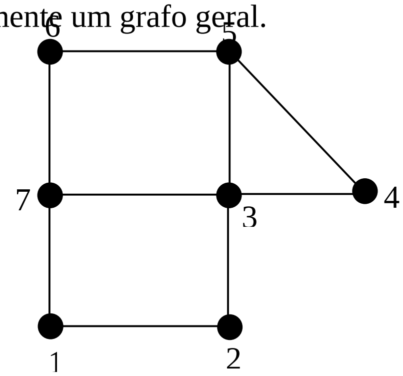


7.2) Dado um grafo G = (V,E), um subconjunto de arestas M $\subseteq$ E é um emparelhamento em G se quaisquer duas arestas em M não são adjacentes em G. Um emparelhamento é assim "um conjunto independente de arestas". Formule um modelo para o problema de emparelhamento de peso máximo, onde é atribuído um peso a cada aresta e procura-se um subconjunto M que totalize a maior soma possível. Por exemplo, no grafo abaixo, M={(1,3),(2,6),(4,5)} é um emparelhamento de peso 9.



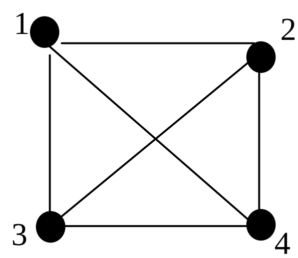
7.3) Dado um grafo G = (V,E), um subconjunto de vértices K $\subseteq$ V é uma cobertura (de arestas por vértices) em G se toda aresta de E for incidente a algum vértice em K. Atribuindo-se um peso $w_i \in \Re$ a cada $v_i \in V$, uma cobertura de peso mínimo é aquela cujos vértices totalizem a menor soma de pesos, em relação a todas as possíveis coberturas em G. Elabore um modelo para encontrar uma cobertura de peso mínimo. Considere inicialmente o exemplo do problema 1, onde K={1,3,5} é uma cobertura com peso 19.

7.4) O problema de coloração de nós (ou vértices) é um problema bastante conhecido em teoria de grafos, que tem muitas aplicações, particularmente, em quadro de horários (time-tabling) e programação. O problema de coloração de nós trata de alocar uma cor para cada nó de forma que nós adjacentes não apresentem a mesma cor. O objetivo é encontrar, para um determinado grafo, uma alocação que use o menor número possível de cores. Sendo assim, elabore um modelo para o problema de coloração considerando o grafo abaixo e posteriormente um grafo geral.



7.5) O problema das p-medianas pode ser definido como segue: Em um grafo G = (V,E) deve-se encontrar um subconjunto de vértices $V_p \subset V$ (conjunto de medianas) com cardinalidade p, tal que a soma das distâncias de cada vértice restante em $\{V – V_p\}$ (conjunto de demandas) até seu vértice mais próximo em V_p seja a mínima possível. O objetivo do problema das p-medianas é determinar p instalações em um conjunto pré-definido com n (n > p) instalações candidatas que deverão atender a um conjunto existente de demandas, de forma que a soma total das distâncias percorridas de cada ponto de demanda até a instalação mais próxima seja a mínima possível. Considerando d_{ij} a distância entre $i \in V$ e $j \in V$, elabore um modelo para o problema das p-medianas.

Considere o seguinte exemplo inicialmente.



8) (Anais XXXI SPBO, 1999 – A. Ignacio, V. Ferreira-Filho e R. Galvão) O problema de localização de concentradores (PLC) é um problema clássico no projeto de redes de computadores. Concentradores são dispositivos que facilitam o compartilhamento de linhas de alta capacidade, e mais eficientes, entre vários usuários. O PLC pode ser esquematizado como segue. Dado um conjunto de possíveis localizações para os concentradores bem como suas capacidades, procura-se determinar quantos concentradores devem ser usados, onde localizá-los e quais usuários alocar a cada um dos concentradores sem violar sua capacidade, de modo a minimizar o custo total. Especificamente, sejam: n o número de usuários, m o número de possíveis localizações de concentradores, c_{ij} (i=1,2,...,n, j=1,2,...,m) o custo de ligar o usuário i ao concentrador localizado em j, d_j (j=1,2,...,m) o custo de se usar uma unidade da capacidade do concentrador localizado em j e v_j (j=1,2,...,m) o custo fixo de se estabelecer um concentrador no local j. Limitações nas estações instaladas nos concentradores, tais como número de portas de entrada, espaço disponível em memória, estrutura de endereçamento e esquemas de compartilhamento de recursos, determinam uma quantidade máxima de usuários que podem ser conectados a cada um desses nós. É assumido que a_{ij} (i=1,2,...,n, j=1,2,...,m) é a quantidade da capacidade do concentrador j necessária para atender ao usuário i, se este é alocado a j, e que b_j (j=1,2,...,m) é a capacidade máxima do concentrador que pode ser instalado no local j. Elabore um modelo para o PLC.

Atenção: Todos os problemas de programação inteira do livro ou do material on-line pode ser utilizado para a elaboração da prova, portanto, estudem....