Exercício: Comerciais - Comédia x Futebol

- Variáveis de decisão:

x_1 = qtde de anúncios de 1-minuto nos shows de comédias

x_2 = qtde de anúncios de 1-minuto nos jogos de futebol

- Restrições:

(1) Qtas mulheres de alta renda são atingidas pelos comerciais nos shows de comédias e nos jogos de futebol.

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

(2) Qtos homens de alta renda são atingidos pelos comerciais nos shows de comédias e nos jogos de futebol.

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

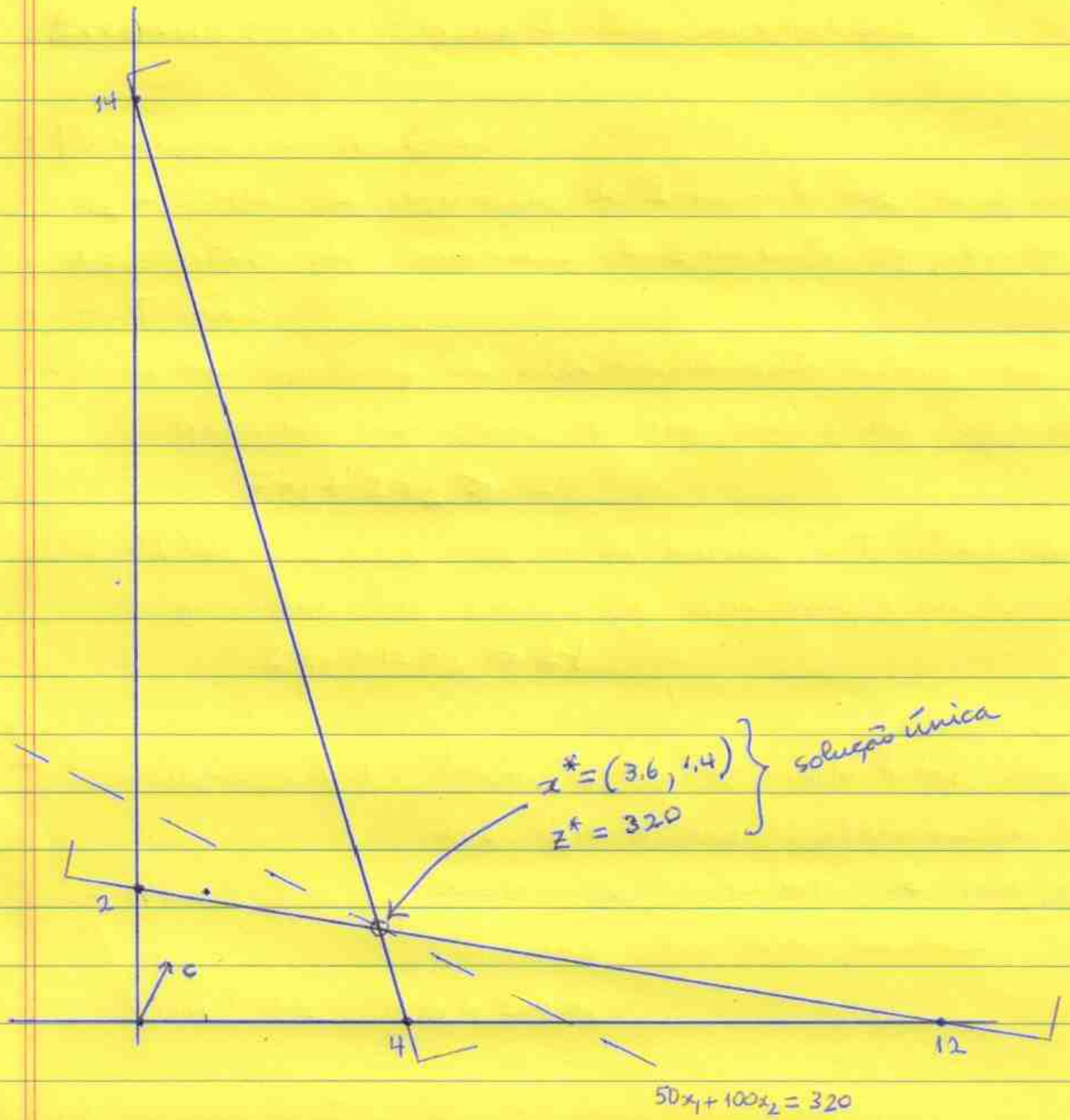
- Função-objetivo: Minimizar o custo total das compras dos comerciais satisfazendo a cobertura mínima de mulheres e homens de alta renda

$$\text{Min } z = 50x_1 + 100x_2$$

(A) Modelo Matemático:

$$\begin{aligned} \text{Min } & z = 50x_1 + 100x_2 \\ \text{sa } & 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ & 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(B) Intervalo nos custos do comercial nos shows de comédia



Variação de c_1:

A reta da função-objetivo é descrita por

$$x_2 = -\frac{c_1}{2} x_1 + \frac{\bar{z}}{100}$$

onde $\frac{\bar{z}}{100}$ é uma constante e usamos c_1 no lugar de 50 para descobrirmos a variação de c_1.

As retas de cada uma das restrições são dadas por

$x_2 = -\frac{7}{2}x_1 + 14 \Rightarrow -\frac{c_1}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow c_1 = 7$

$x_2 = -\frac{1}{6}x_1 + 2 \Rightarrow -\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_1 = 1/3$

Como trabalhamos com os coeficientes angulares, precisamos multiplicar os valores encontrados por 50 que é o coeficiente original de x_1. Logo, a variação fica $c_1 \in [\frac{50}{3}, 50 \times 7] \Rightarrow c_1 \in [16.7, 350]$

Assim, podemos aumentar o coeficiente de x_1 em 300 e diminuir em 33.3.

(C) O mesmo raciocínio se aplica para c_2, só que agora a função-objetivo é da forma

$$x_2 = -\frac{50}{c_2}x_1 + \frac{\bar{k}}{c_2}$$

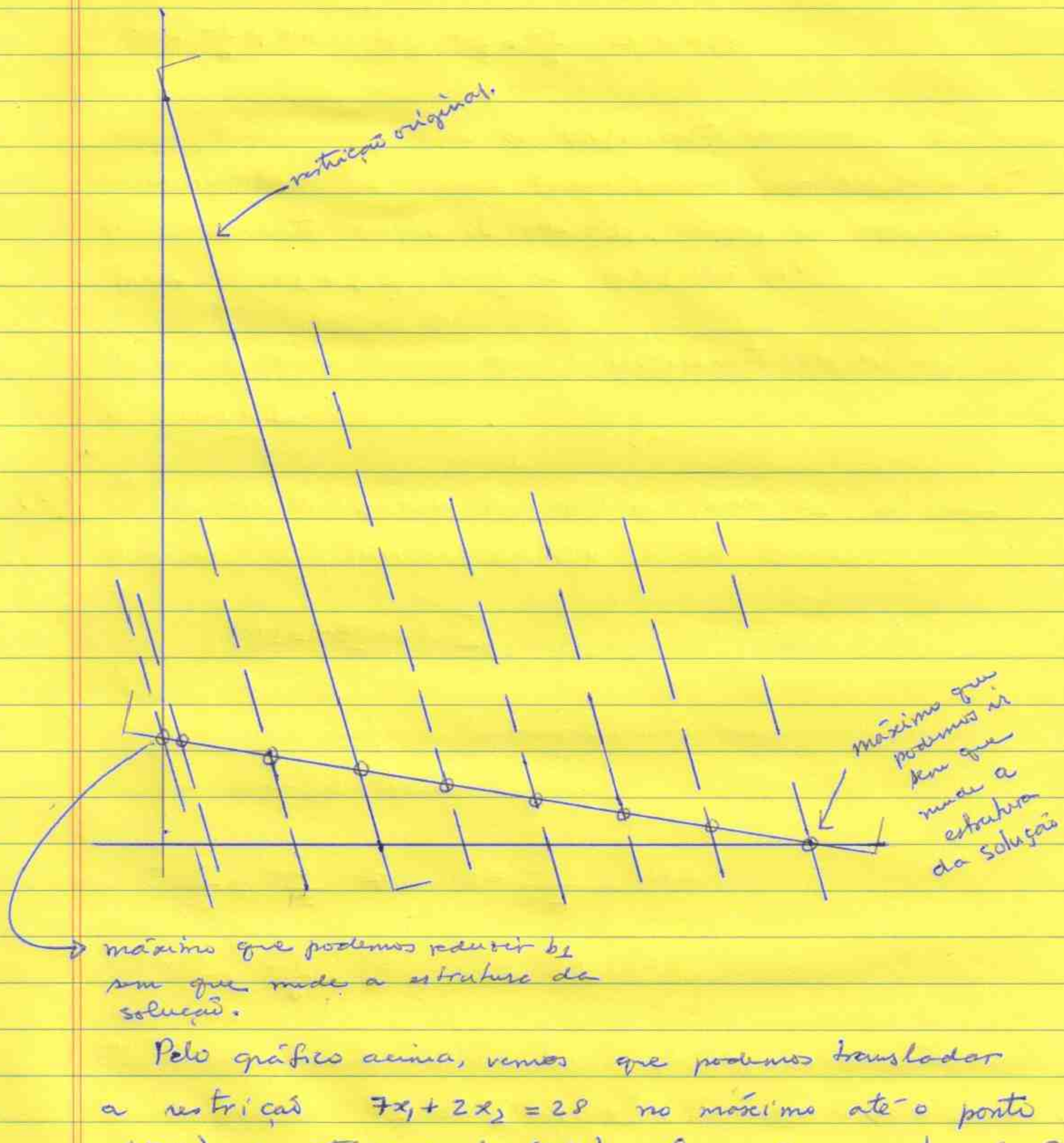
Na comparação com os coeficientes angulares das retas das restrições temos:

$-\frac{50}{c_2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{-100}{-7} = 14.3$

$-\frac{50}{c_2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_2 = 300$

Neste caso, como c_2 não foi dividido por ninguém, a variação de c_2 é $[14.3, 300]$. Ou seja, o acréscimo foi de 200 e o decréscimo foi de 85.7.

(D)



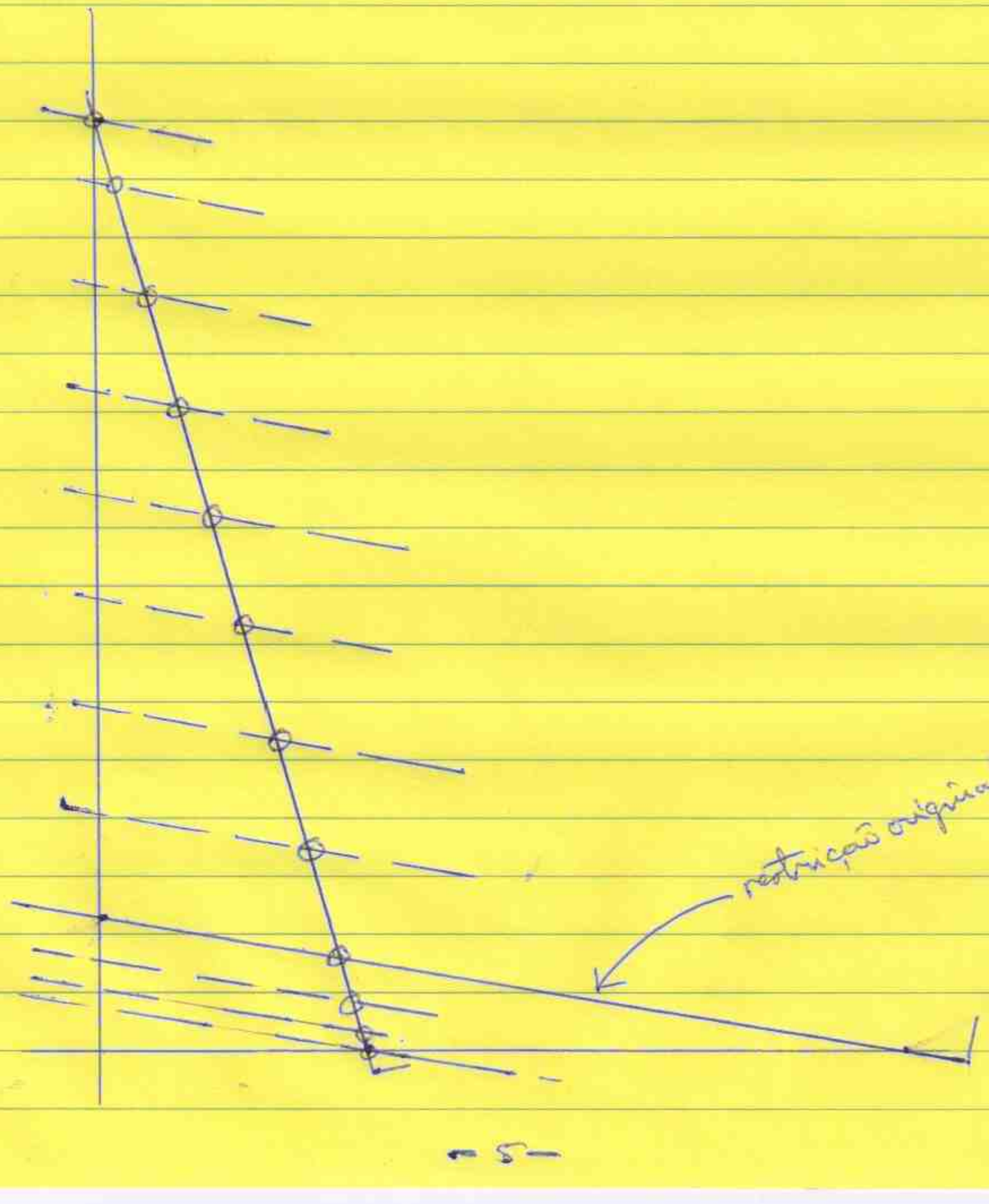
máximo que podemos reduzir b_1 sem que mude a estrutura da solução.

Pelo gráfico acima, vemos que podemos transladar a restrição $7x_1 + 2x_2 = 28$ no máximo até o ponto $(12,0)$ e até o ponto $(0,4)$. Como é uma translação basta calcular o valor da restrição neste dois pontos para obtermos os valores de b_1:

$(12,0)$: $7 \times 12 + 2 \times 0 = 84 \Rightarrow 7x_1 + 2x_2 = 84$ é a reta que passa pelo ponto $(12,0)$, logo, b_1 aumentou de 28 para 84 $\Rightarrow$ acréscimo de 56

$(0,2)$: $7 \times 0 + 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 7x_1 + 2x_2 = 4$ é a reta que passa pelo ponto $(0,2)$, logo, b_1 diminuiu de 28 para 4 $\Rightarrow$ decréscimo de 24

(E)



Logo, a restrição $2x_1 + 12x_2 = b_2$ passa pelos pontos $(0,14)$ e $(4,0)$:

$(0,14)$: $2\times 0 + 12\times 14 = 168 \Rightarrow 2x_1 + 12x_2 = 168$

$\Rightarrow$ acréscimo de 144

$(4,0)$: $2\times 4 + 12\times 0 = 8 \Rightarrow 2x_1 + 12x_2 = 8$

$\Rightarrow$ decréscimo de 16.

(F) Preço-sombra da restrição: $7x_1 + 2x_2 = 28$

Para encontrar o preço-sombra da restrição $7x_1 + 2x_2 = 28$ precisamos saber qual o efeito na função-objetivo ao aumentar o lado direito da restrição em 1 unidade. Para tanto, vamos somar Δ no lado direito da restrição e escrever x_1 e x_2 como função de Δ:

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 = 28 + \Delta \\ 2x_1 + 12x_2 = 24 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3.6 + 0.15\Delta \\ x_2 = 1.4 - 0.025\Delta \end{array}$$

Substituindo este resultado na função-objetivo temos: $50x_1 + 100x_2 = 320 + 5\Delta$

Logo qdo $\Delta = 1$ temos que o valor da função-obj. aumenta em 5 unidades $\Rightarrow$ logo, o preço sombra da restrição $7x_1 + 2x_2 = 28$ é 5.

Aplique o mesmo procedimento e encontre que o preço-sombra de $2x_1 + 12x_2 \leq 24$ é 7.5