LE901 – Pesquisa Operacional - Prova 1: 25/09/2012

Prof. Moretti

Nome:____RA:____________________

Questão 1: Uma empresa manufatura carros e caminhões. Cada carro contribue com R$ 300,00 reais no lucro e cada caminhão contribue com R$ 400,00 reais. Os recursos necessários para produzir um carro e um caminhão estão mostrados na tabela abaixo:

Tipo	Dias na Máquina 1	Dias na máquina 2	Toneladas de aço
Carro	0.8	0.6	2
Caminhão	1	0.7	3

A empresa pode alugar 98 máquinas do tipo 1 por dia a um custo de R$ 50,00 reais por máquina. Atualmente, a empresa tem 73 máquinas do tipo 2 e 260 toneladas de aço disponíveis. O setor de marketing avalia que no mínimo 88 carros e no mínimo 26 caminhão podem ser produzidos. Seja

- x_1 = número de carros produzidos diariamente
- x_2 = número de caminhões produzidos diariamente
- M_1 = número de máquinas do tipo 1 alugadas diariamente

O Modelo Matemático para obter uma solução que maximize o lucro é dado por

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & z = 300x_1 + 400x_2 - 50M_1 \\
\text{sujeito a} \quad & 0.8x_1 + x_2 - M_1 \le 0 \\
& M_1 \le 98 \\
& 0.6x_1 + 0.7x_2 \le 73 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 260 \\
& x_1 \ge 88 \\
& x_2 \ge 26
\end{aligned}
$$

Cujo relatório de análise de sensibilidade com relação às variáveis é dado por

Variáveis

Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
x1 Valores	88	0	300	20	1E+30
x2 Valores	27,6	0	400	1E+30	25
M1 Valores	98	0	-50	1E+30	350

E, o relatório com relação às restrições é da forma

Restrições

Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
<= Restrição 1	0	400	0	0,4	1,6
<= Restrição 2	98	350	98	0,4	1,6
<= Restrição 3	72,12	0	73	1E+30	0,88
<= Restrição 4	258,8	0	260	1E+30	1,2
>= Restrição 5	88	-20	88	2	3
>= Restrição 6	27,6	0	26	1,6	1E+30

Usando como APENAS o relatório de sensibilidade gerado pelo SOLVER, responda as perguntas abaixo:

A. Qual é o valor da função objetivo no ótimo?

RESPOSTA: Como $x_1 = 88$, $x_2 = 27.6$ e $M_1 = 98$ e como $z = 300x_1 + 400x_2 - 50M_1 = 300*88 + 400*27.6 - 50*98 = 32540$.

B. Se os carros contribuissem com R$ 310,00 reais, qual seria a solução com esta mudança,isto é, quais seriam os valores de x_1, x_2 e M_1 e z^*?

RESPOSTA: Como aumento do custo de x_1 está dentro do intervalo de acréscimo permitido, a estrutura da solução não muda, ou seja, são as mesmas restrições que dão origem a este ponto ótimo, e portanto, os valores de x_1, x_2 e M_1 são os mesmos. Mas, como agora $z = 310x_1 + 400x_2 - 50M_1 = 310*88 + 400*27.6 - 50*98 = 33420$.

C. Qual seria o valor máximo que a empresa pagaria para alugar mais uma máquina do tipo 1?

RESPOSTA: O aumento máximo permitido para o lado direito da restrição $M_1 \leq 98$ é 0.4 e portanto, não podemos usar a informação do preço-sombra da restrição.

D. Qual seria o valor máximo que a empresa pagaria por uma tonelada a mais de aço?

RESPOSTA: A restrição $2x_1 + 3x_2 \leq 260$ não está no gargalo e portanto, seu preço-sombra é zero, o que indica que não adianta ter mais deste recurso que não vamos melhorar o valor da função-objetivo. Logo, não pagamos nada para ter mais deste recurso.

E. Se a empresa produzisse 86 carros, qual seria o lucro dela?

RESPOSTA: A restrição $x_1 \geq 88$ tem preço-sombra igual a -20. O que quer dizer que uma unidade a mais provoca uma DIMINUIÇÃO no valor da função-objetivo. Mas, uma unidade a menos provoca um AUMENTO no valor da função-objetivo. Logo, $z = 32540 - 2*(-20) = 32580$.

F. A empresa está considerando a produção de Jeeps. Um Jeep contribue com R$ 600,00 reais ao lucro e requer 1.2 dias na máquina 1, 2 dias na máquina 2 e 4 toneladas de aço. A empresa deve produzir os jeeps?

RESPOSTA: Como a produção de jeeps compete por recursos com os carros e caminhões, uma unidade produzida iria utilizar 1.2 dias do recurso de tempo da máquina 1 , 2 dias do recurso de tempo da máquina 2 e 4 toneladas do recurso de aço. Assim sendo, o cutso de produção do jeep seria 1.2*400 + 2*0 + 4*0=480. Como o jeep seria vendido a R$ 600 reais então a empresa teria um lucro de R$ 120,00 reais, o que sugere a produção.

Questão 2: Uma empresa produz três tipos de roupas: Camisas, shorts e calças. O máquinário para produzir camisas é alugado a um custo de R$ 200,00/semana, o maquinário de shorts custa R$ 150,00/semana e o maquinário de calças custa R$ 100,00/semana. As tabelas baixo nos dão informações dos recursos utilizados na produção:

	Trabalho (em horas)	Material (metros quadrados)
Camisa	3	4
Shorts	2	3
Calças	6	4

	Preço de Venda (em reais)	Custo de Produção (emreais)
Camisa	12	6
Shorts	8	4
Calças	15	8

Cada semana a empresa tem disponível 150 horas de trabalho e 160 metros quadrados de pano. Formule com um Problema de Programação Linear Inteira cuja solução nos dê o mix de produção ótimo que maximize o lucro líquido da empresa.

RESPOSTA: Sejam

- $x_j =$ quantidade produzida da roupa j
- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $M =$ número suficientemente grande

Então o modelo matemático seria

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\text{sujeito a} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 150 \\
& 4x1 + 3x2 + 4x3 \le 160 \\
& x_1 \le My_1 \\
& x_2 \le My_2 \\
& x_3 \le My_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{array}
$$

As restrições do tipo $x_j \le My_j$ garantem que uma vez que $x_j > 0$ a variável $y_j = 1$ e assim possamos cobrar o aluguel do maquinário utilizado apenas uma vez.

Questão 3: Considere o problema abaixo

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 \le 4 \\
& \left(\begin{array}{c} -x_1 + x_2 \le 2 \\ \text{OU} \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{array} \right) \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

Pede-se:

A. Escreva o problema acima com um problema de programação linear inteira.

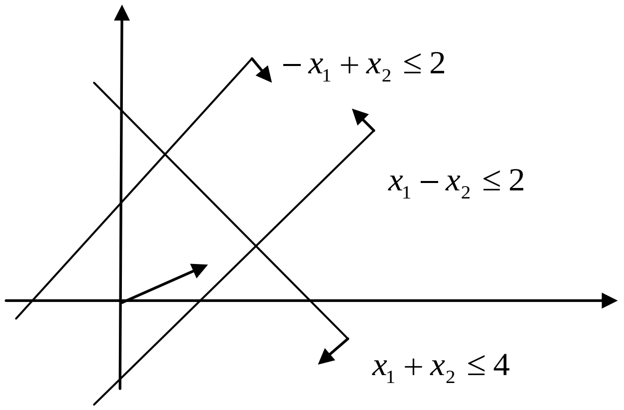
RESPOSTA: Como visto em classe o modelo matemático seria

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 \le 4 \\
& -x_1 + x_2 \le 2 + My \\
& x_1 - x_2 \le 2 + M(1-y) \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& y \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Onde M é um número suficientemente grande e

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se a restrição } x_1 - x_2 \le 2 \text{ é a restrição atuante.} \\ 0 & \text{se a restrição } -x_1 + x_2 \le 2 \text{ é a restrição atuante} \end{cases}$$

B. Resolva-o graficamente.



Ou seja é como se tivéssemos duas regiões factíveis: uma com a primeira e segunda restrições e a outra com a primeira e terceira restrições. Ao maximizarmos nesta duas regiões obtemos $z^* = 7$ com $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$ para aprimeira região e $z^* = 8$ com $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$. Portanto, escolhemos $z^* = 8$, pois, queremos maximizar.Assim sendo, a restrição atuante é $-x_1 + x_2 \le 2$ com $y = 0$.

	1A	1B	1C	1D	1E	1F	2	3A	3B	TOTAL
Pontuação	1	1	1	1	1	2	5	1	2	15

OBSERVAÇÃO: A PROVA TEM 15 PONTOS. A SUA NOTA SERÁ (NÚMERO DE PONTOS OBTIDOS)/1.5