MA520 - Geometria Euclidiana e Desenho Geométrico
Notas de Aula

Marcelo Firer e Daniel Miranda Machado

6 de Março de 2007

1^o semestre de 2007

Capítulo 1

Lógica: A Natureza do Raciocínio Dedutivo

Este não é um curso de lógica, mas inciaremos com uma abordagem ingênua acerca de cocneitos básicos, fundamentais para o desenvolvimento do trabalho matemático que faremos nesta disciplina (e em outras mais): o raciocínio dedutivo, atarvés do qual **demonstramos** proposições em matemática,

O estudo matemático é constituido essencialmente de **proposições,** ou **sentenças lógicas** que são sentenças declarativas, que expressam significados que podemos, em princípio, determinar se são verdadeiros ou falsos:

Exemplo: □

1. 2 é um número natural;
2. Cão que ladra não morde;
3. Dados dois pontos, existe uma e apenas uma reta passando por estes pontos;
4. Sou careca;
5. O centésimo quinto dígito da expansão decimal de $\sqrt{3}$ é 7;
6. Não existe vida em Marte;
7. Existe vida em Marte;
8. Quem ama não mata;
9. Quem não ama, mata;
10. Quem mata não ama;

11. Como vai?

Quais das afirmações acima são proposições?

Uma proposição pode ser vista como uma sentença condicional, com sujeito (que condiciona) e predicado (que concluiu), em nosso contexo chamados de hipótese e tese (ou conclusão). Muitas vezes esta sintaxe lógica das sentenças fica mais clara quando explicitamos todos os conectivos ocultos. Na primeira sentença por exemplo, podemos reformular dizendo que "se x é um número real igual a dois, então x é par". Geralmente, o pedaço da sentença que segue *se* é a hipotese e a que segue a palavra *então* é a conclusão (ou tese).[1]

Exercício: Para cada uma das proposições do exemplo 1, determine a hipotese e a tese. □

De uma forma concisa, se denotarmos a hipótese por a e a tese por b, temos uma sentença condicional que pode ser resumida simbolicamente por

$$a \to b,$$

ou seja, se a é válida, então ($\to$) b também.

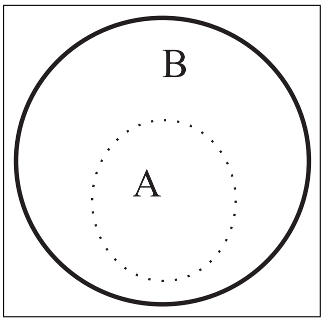
De um modo bastante amplo, podemos identificar a hipótese e a tese com dois conjuntos, e neste sentido, o item 2 do exemplo 1 pode ser reesrito da seguinte forma: seja CL o conjunto dos cachorros que ladram e CNM o conjunto de todos os cachorros que não mordem. Então, se $x \in CL$ (sentença a, pronunciada *se x pertence ao conjunto dos cachorros que latem*) então $x \in CNM$ (sentença b, pronunciada *x pertenece ao conjunto dos cachorros que não mordem*).

Dizer que a sentença acima $a \to b$ é verdadeira significa então dizer que o conjunto CL está contido no conjunto CNM ($CL \subseteq CNM$), o que justifica os *diagramas de Euller*[2]representado por dois círculos, um contendo o outro:

[1]Uma proposição é uma sentença declarativa que satisfaz três princípios básicos:

1. O **princípio da identidade** que garante que uma porposição é igual a si mesma;
2. O **princípio da não-contradição**, segundo o qual uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa;
3. E o **Princípio do Terceiro Excluído**, que garante que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo uma terceira alternativa.

[2]Leonhard Euler, nascido em 1707, foi um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos. Alguma informação sobre sua vida e obra pode ser encontrada em http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. O tri-centenário de seu nascimento é comemorado este ano em todo o mundo. Também aqui no Imecc teremos um evento comemorativo.



Dada sentença $a \to b$ a **sentença oposta** é a sentença $b \to a$. Veja que a veracidade de $a \to b$ nada nos ensina sobre a veracidade de $b \to a$. Por exemplo, a sentença *"Marcelo Firer é professor de matemática"* é verdadeira, mas sua oposta não. Já a sentença *"um número natural é divisível por dois se o algarismo da unidade em sua representação natural for divisível por 2"* é verdadeira, assim como a sentença oposta.

A **contrapositiva** de $a \to b$ é obtida pela negação de b implicando na negação de a, em símbolos, $\tilde{}b \to \tilde{}a$. Em, termos lógicos uma sentença e sua contrapositiva são **logicamente equivalentes** ou seja, ou ambas a sentenças são verdadeiras ou ambas são falsas, o que denotamos por $a \leftrightarrow b$. Se pensarmos em termos de conjuntos fica mais fácil percebermos o sginificado desta última afirmação: se a significa dizer $x \in A$ e b significa $x \in B$ então, nossa sentença $a \to b$ pode ser reescrita como

$$se\ x \in A \text{ então } x \in B$$

que facilmente podemos verificar ser equivalente a

$$\text{se } x \notin B \text{ então } x \notin A$$

ou ainda, refraseando,

$$\text{todo elemento de } A \text{ é elemento de } B$$

é equivalente a dizermos que

$$\text{um elemento que não perntece a } B \text{ não pode pertencer a } A.$$

A **sentença inversa** de $a \to b$ é a sentença

$$\tilde{}a \to \tilde{}b$$

que é equivalente a sentença oposta $b \to a$.

Resumindo:

$$a \to b \text{ e } \tilde{}b \to \tilde{}a \text{ são equivalentes}$$

assim com a como a sentença oposta e a inversa

$$b \to a \text{ e } \tilde{}a \to \tilde{}b.$$

Exercício: Para cada uma das proposições no exemplo 1:

1. Escreva a sentença oposta, a contrapositiva e a inversa;
2. Para cada uma destas sentenças (em todas as formas) determine quais são verdadeiras e quais não são verdadeiras.

$\square$

Exercício: Para cada uma das sentenças abaixo, explicite a hipotese e a tese, escreva a sentença oposta, a contrapositiva e a inversa e determine quais destas são verdadeiras.

1. As diagonais de um paralelogramo possuem o mesmo comprimento.
2. oda função bijetora possui inversa.
3. Todo retângulo é um quadrado.

$\square$

Sob o ponto de vista lógico, uma **definição** é apenas uma equivalência lógica. Dizemos que "*um quadrado é um qaudrilátero que tem todos os lados e todos os ângulos com a mesma medida*". Dividindo a sentença em

a: Uma figura dada é um quadrado;
b: Uma figura dada é um quadrilátero que tem todos os lados
e todos os ângulos com a mesma medida

estamos dizendo que toda figura satisfazendo b satisfaz a ($b \to a$ ou a ocorre **se** b ocorre) e também apenas as figuras que satisfazem b satisfazem a ($\tilde{}b \to \tilde{}a$ ou a ocorre **apenas se** b ocorre), ou seja

$$
\begin{aligned}
& b \to a \text{ e } \tilde{}b \to \tilde{}a \Leftrightarrow \\
& b \to a \text{ e } a \to b \Leftrightarrow \\
& a \leftrightarrow b
\end{aligned}
$$

Exercício: Rerpesente as afirmações abaixo por meio de diagramas de Euler

1. a se b
2. a apenas se b
3. b se a
4. b apenas se a

□

Exercício: Sejam A, B, C e D conjuntos. Para cada um dos seguintes teoremas enuncie em português a hipótese e a tese. Prove cada teorema.
a) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.
b) $A \subset (C - B) \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$.
c) $A \cup B = C$ e $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow B = C - A$.
d) $A \subset C$ e $B \subset D \Longrightarrow A \cup B \subset C \cup D$.
f) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Longrightarrow A = B$.
g) $A \subset B \Longrightarrow A \cap (C - B) = \emptyset$.
k) $A \subset \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset$.
l) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
m) $A \subset B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
n) $A \subset C$ e $B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B \subset C$.
o) $A - B \subset B \Longleftrightarrow A - B = \emptyset$.
p) $A \cup B \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$.
□

Para que uma afirmação seja verdadeira, **todo** objeto satisfazendo as hipóteses deve satisfazer a tese. Pensemos na seguinte situação:

Exemplo: Em uma investigação a polícia tem diversos suspeitos e sabe que o criminoso é daltônico. Um suspeito daltônico pode ser considerado necessariamente culpado ou inocente? E se este for o único suspetio daltônico? e um suspeito que pode provar que não é daltônico? □

Para demonstrarmos a falsidade de uma afirmação, basta encontrarmos um contra-exemplo, ou seja, um único objeto que satisfaça as hipótese sem satisfazer a tese. Considere no exemplo acima a situação em que a plícia sabe que a pessoa qeu cometeu o crime, além de daltônico, tem 1,82 m de altura, pesa 77 kg, tem 23 anos e se chama Carlos Eduardo. Uma pessoa chamada Carlos Eduardo, daltônico, com 23 anos, 1,82 m de altura e peso de 77kg é necesariamente culpada? Veja que temos diversos conjuntos:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{daltônicos}\}\,; \\
B &= \{\text{Pessoas de 23 anos}\}\,; \\
C &= \{\text{Pessoas com 1,82 m de altura}\}\,; \\
D &= \{\text{Pessoas com 77 kg}\}\,; \\
E &= \{\text{Pessoas chamadas Carlos Eduardo}\}\,; \\
F &= \{\text{culpado}\}\,.
\end{aligned}$$

Nossa suspeito pertence ao conjunto $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ e queremos saber se $A \cap B \cap C \cap D \cap E \subseteq F$. Se encontarmos mais de uma pessoa em $A \cap B \cap C \cap D \cap E$, saberemos que não podemos ter $A \cap B \cap C \cap D \cap E \subseteq F$, ou seja, teremos encontrado um contra-exemplo, de modo que, mesmo que este Carlos Eduardo seja um forte suspeito, ainda não podemos ter certeza de ser ele o autor do crime.

Exercício: Sejam A, B e C conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:
(a) Se $B \subset C$ então $A \cap B \subset A \cap C$.
(b) Se $A \cap B \subset A \cap C$ então $B \subset C$.
□

Exercício: Encontre na mídia exemplos de conclusões lógicas indevidas. São muitas.
□

Um **silogismo** é um argumento lógico no qualm a conclusão (tese) e deduzida a partir de duas proposições sendo a conclusão de uma a hipótese da outra. Em simbolos é uma proposição da forma

$$\begin{aligned} a \to b \ &(1^a \text{ premissa}) \\ b \to c \ &(2^a \text{ premissa}) \\ \text{portanto } a \to c \ &(\text{conclusão}). \end{aligned}$$

Se ambas as premissas forem verdadeiras, a conclusão também deve ser verdadeira:

Se você vive em Campinas então você vive no Estado de SP;
Se você vive no Estado de SP então você vive no Brasil;
Logo, se você vive em Campinas você vive no Brasil.

Exercício: Analise o seguinte argumento:

Migalhas de pão são melhores do que nada;
Nada é melhor que um bom peaço de carne;
Logo, migalhas de pão são melhroes que um bom pedaço de carne.

□

Um **Teorema** é uma proposição que pode ser demonstrada por argumentos dedutivos a partir de proposições já consideradas aceitas como verdadeiras. Em termos simbólicos, temos que

$$\begin{aligned} &\text{Se } a_1 \to a_2, a_2 \to a_3, ..., a_{n-1} \to a_n \ (n \text{ um número natural}) \\ &\text{então } a_1 \to a_n. \end{aligned}$$

Um teorema pode ser demonstrado **indiretamente** (ou demosntrado **por absurdo**) assumindo no iníco da demonstração uma hipótese que nos eva a uma contradição.

Exemplo: Suponha a situação em que o heróis da história deve escolher entre duas portas: atrás de uma delas se encontra a princesa prometida com quem deseja casar e atrás da outra o leão faminto. Suponha ainda que em cada uma das portas temos uma placa e que **sabemos** que uma destas é verdadeira e a outrra é falsa. As placas dizem o seguinte:

PortaA: "Atrás desta porta se encontra a princesa e atrás da outra porta se encontra o leão"

Porta B: "Atrás de uma porta se encontra a princesa e atrás da outra se encontra o leão"

Supondo que a placa da porta A é verdadeira, temos que a da porta B também será e como não podemos ter ambas verdadeiras (por hipótese), devemos concluir, por absurdo, que a afirmação assumida, de que "*a placa da porta A é verdadeira*"deve ser falsa e portanto, o leão se enconrra atrás da porta A e a princesa atrás da porta B. □

Um **axioma (ou postulado**) é uma proposição que aceitamos como verdadeiras sem necessidade de qualquer tipo de demonstração (a não ser a plausibilidade que geralmente é determinada pelos nossos sentidos). Um sistema dedutivo é uma teoria na qual, a apartir de alguns **termos indefinidos** e um conjunto de postulados (ou axiomas), deduzimos, na forma de teoremas, outras proposições que considermaos verdadeiras.

Exercício:

Teorema: Para viajar para a Austrália, você deve tirar um retrato de seu rosto.
Postulado: Para viajar para a Austrália, você deve obter um visto de turista.
Postulado: Para obter um pasaporte, você deve tirar um retrato de seu rosto.

1. É possível demonstrar o Terorema acima usando apenas estes postulados?

2. Adicione um postulado que torne possível demonstrar o teorema e demonstre-o.

□

Exercício: A Sra. Branca foi assassinada.

1. O que você deve assumir para demonstrar por absurdo que o Coronel Mostarda é o assassino?

2. Use esta hipótese e os fatos abaixo para demonstrear que o Cel. Mostarda é o assassino.

   Fato 1: Se o assassino fosse a senhora Escarlate, ela teria usadoum revolver.

Fato 2: Não foram encontradas balas de revolver.

Fato 3: Se o Cel. Mostarada não fosse o assassino, então a senhora Escalarte seria a assassina.

Fato 4: Se um revolver fosse usado, uma bala teria sido disparada.

□