

MA-MM453 - Topologia Geral

Lista de Exercícios IV

1. Seja $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, considerando em X a topologia produto. Seja $M = \{\chi_A \mid A \subset \mathbb{R}, A \text{ finito}\} \subset X$, onde χ_A é a função característica de A .
 - (a) Dada sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , mostre que $f_n \rightarrow f$ se e somente se $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Prove que $\chi_{\mathbb{R}} \in \overline{M}$.
 - (c) Prove que não existe sequência $(\chi_{A_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $\chi_{A_n} \rightarrow \chi_{\mathbb{R}}$.
 - (d) Prove que X não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

2. Se uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em X e $x \in X$.
 - (a) Mostre que se $x_\lambda \rightarrow x$ então toda subrede de (x_λ) converge para x .
 - (b) Mostre que se toda subrede de (x_λ) possui subrede convergindo para x , então $x_\lambda \rightarrow x$.

3. Seja \mathcal{A} uma base de filtro em X e \mathcal{B} uma base de filtro em Y .
 - (a) Prove que a família

$$\mathcal{C} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

é base de filtro de $X \times Y$.

- (b) Prove que $\mathcal{C} \rightarrow (x, y)$ se e somente se $\mathcal{A} \rightarrow x$ e $\mathcal{B} \rightarrow y$.

4. Seja X um conjunto infinito com a topologia co-finita. Seja

$$\mathcal{G} = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ é finito}\}.$$

- (a) Prove que \mathcal{G} é um filtro em X .
- (b) Prove que $\mathcal{G} \rightarrow x$ para todo $x \in X$.

5. Seja \mathcal{B} uma base de filtro em X e seja

$$\Lambda = \{(a, A) \mid a \in A \in \mathcal{B}\}.$$

- (a) Prove que Λ é conjunto dirigido se definirmos $(a, A) \leq (b, B)$ quando $A \leq B$.
- (b) Prove que a rede $x_\lambda \rightarrow x$ se e somente se $\mathcal{B} \rightarrow x$.
- (c) Prove que x é ponto de acumulação de \mathcal{B} se e somente se x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.