# MA-MM453 - Topologia Geral
# Lista de Exercícios III

1.

2. Sejam $T \subset T'$ duas topologias em $X$. $(X,T)$ é conexo implica em $(X,T')$ conexo? E a recíproca?

3. Seja $A \subset X$. Mostre que se $C \subset X$ é subespaço conexo que intercepta tanto $A$ como $X \backslash A$, então $A$ intercepta a fronteira de $A$.

4. Sejam $X$ e $Y$ espaços conexos, $\emptyset \neq A \subsetneq X$, $\emptyset \neq B \subsetneq Y$ subespaços próprios. Mostre que $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ é conexo.

5. Mostre que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ não são homemomorfos, para $n > 1$.

6. Mosttre que $(0,1), (0,1]$ e $[0,1]$ não são homeomorfos.

7. Seja $f : S^1 \to \mathbb{R}$. Mostre que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

8. Mostre que toda função continua $f : I \to I$ possui ponto fixo ($x \in I$ tq $f(x) = x$).

9. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Mostre que $A$ é conexo por caminhos.

10. Seja $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das sequências reais. Definimos em $X$ a topologia produto $T_P$, a topologia das caixas $T_C$ e a topologia uniforme $T_U$, definida pela métrica $\rho(x,y) := \sup\left\{\overline{d}(x_n, y_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, onde $\overline{d}(x_n, y_n) = \min\{|x_n - y_n|, 1\}$.

    (a) Determine as componentes conexas de $(X, T_P)$;

    (b) Mostre que $x$ e $y$ pertencem a mesma componente conexa de $(X, T_U)$ se e somente se a sequência
    $$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ....)$$
    for limitada;

    (c) Mostre que $x$ e $y$ pertencem a mesma componente conexa de $(X, T_U)$ se e somente se a sequência
    $$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ....)$$
    for eventualmente nula (nula a menos de número finito de termos).

11. Demonstre o Teorema do Valor Intermediário.

12. Suponha que $X$ possui base enumerável. Mostre que toda base contém base enumerável.

13. Suponha que $X$ possui base enumerável. Seja $A \subset X$ conjunto não enumerável. Mostre que $A$ possui sunbconjnto não enumerável de potos limites.

14. Considere o quadrado $I^2$ com a seguinte relação: $(x,y) \leq (x', y')$ se $x < x'$ ou se $x = x'$ e $y \leq y'$.

    (a) Mostre que esta é uma relação de ordem.

    (b) Defina o intervalo $(z,w) := \left\{u \in I^2 | z < u < w\right\}$. Mostre que a família de intervalos $\left\{(z,w) \,|\, z, w \in I^2\right\}$ define uma base de uma topologia.

    (c) Mostre que com esta topologia, $I^2$ não é metrizável.

15. Seja $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}$. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathbb{T}_K$ que tem como base os intervalos $(a,b)$ e os conjuntos da forma $(a,b) \backslash K$. Mostre que com esta topologia $\mathbb{R}$ é Hausdorff mas não regular ($T_3$).

16. Sejam $f, g : X \to Y$ contínuas, com $Y$ Hausdorff. Mostre que $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ é fechado em $X$.

17. Seja $p : X \to Y$ uma função contínua, fechada e sobrejetora. Mostre que se $X$ é normal ($T_4$) então $Y$ também é normal.

18. Seja $p : X \to Y$ uma função contínua, fechada e sobrejetora tal que $p^{-1}(\{y\})$ é compacto para todo $y \in Y$. Mostre que

    (a) $X$ é Hausdorff $\Rightarrow$ $Y$ é Hausdorff;

(b) $X$ é regular $\Rightarrow Y$ é regular;

(c) $X$ é localmente compacto $\Rightarrow Y$ é localmente compacto;

(d) $X$ satisfaz o $2^o$ axioma da enumerabilidade $\Rightarrow Y$ satisfaz o $2^o$ axioma da enumerabilidade.

19. Seja $G$ um grupo topológico (as operações $(g,h) \longmapsto g \cdot h$ e $g \longmapsto g^{-1}$ são contínuas).

    (a) Se $A \subset G$ for fechado e $B \subset G$ compacto, então $A \cdot B := \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$ é fechado.

    (b) Seja $H$ subgrupo de $G$ e $p : G \to G/H$ a aplicação quociente. Mostre que $p$ é aplicação fechada se $H$ for compacto.

    (c) Seja $H$ subgrupo compacto de $G$. Se $G/H$ é compacto, então $G$ também é compacto.

20. Uma ação de um grupo topológico $G$ em um estpaço topológico $X$ é uma função contínua $\alpha : G \times X \to X$ tal que $\alpha(e,x) = x$ para todo $x \in X$ ($e \in G$ é o elemento identidade) e $\alpha(g_1, (\alpha(g_2, x))) = \alpha(g_1 \cdot g_2, x)$, $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$. Definimos a órbita de $x$ como $G(x) := \{g(x) | g \in G\}$. Esta define uma relaçãod e equivalência em $X$ e denotamos $X/\sim = X/G$. Suponha que $G$ é grupo topológico compacto agindo em $X$. Mostre que:

    (a) $X$ é Hausdorff $\Rightarrow Y$ é Hausdorff;

    (b) $X$ é regular $\Rightarrow Y$ é regular;

    (c) $X$ é normal $\Rightarrow Y$ é normal;

    (d) $X$ é localmente compacto $\Rightarrow Y$ é localmente compacto;

    (e) $X$ satisfaz o $2^o$ axioma da enumerabilidade $\Rightarrow Y$ satisfaz o $2^o$ axioma da enumerabilidade.

21. Seja $X$ espaço Hausdorff e localmente compacto. Mostre que $X$ é regular.

22. Seja $X$ um espaço normal. Mostre que dados $x, y \in X$ distintos, exist função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

23. Um espaço métrico satisfaz o $2^o$ axioma da enumerabilidade?

24. Mostre que o limite de uma sequência não é necessariamente único. Mostre que este é único se o espaço for Hausdorff.

25. Seja $X$ espaço compacto e Hausdorff. Mostre que o conjunto $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ das funções reais contínuas em $X$ separa pontos, no sentido que dados dois pontos distintos, existe função contínua que assume valores distintos nestes pontos.

26. Seja $X$ espaço normal e $A \subset X$ compacto. Mostre que dada função contínua $f : A \to \mathbb{R}^n$ existe $F : X \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $F|_A = f$.

27. Seja $X$ espaço métrico completo (sequências de Cauchy convergem) e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos abertos e densos. Mostre que $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso.