# MA-MM453 - Topologia Geral
# Lista de Exercícios II

1. Seja $X = [0,1] \times [0,1]$ com a relação de equivalência em que as classes não triviais são definidas por $(x,0) \sim (x,1)$ e $(0,y) \sim (1,y)$. Mostre que $X/\sim$ é homeomorfo ao toro$T^2$.

2. Seja $X = \{z \in \mathbb{C} | \, \|z\| \leq 1\}$ com a relação de equivalência em que a única classe não trivial é definida por $1 \sim z \iff \|z\| = 1$. Mostre que $X/\sim$ é homeomorfo a esfera $S^2$.

3. Seja $p : X \to Y$ função contínua. Mostre que se existe $f : Y \to X$ contínua tal que $p \circ f = Id_Y$ então $p$ é aplicação quociente.

4. Dado subconjunto $A$ de um espaço topoógico $X$, uma *retração de $X$ em $A$* é uma função contínua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a, \forall a \in A$. Mostre que uma retração é uma projeção.

5. *Exercício Extra:*

   Dado um grupo $(G, \cdot)$, consideramos as funções $\cdot : G \times G \to G$ que associa a cada para $(g,h)$ o produto $g \cdot h$ e a inversão $i : G \to G$ que a cada $x$ associa seu inverso $x^{-1}$. Suponha que $G$ seja também um espaço topológico. Dizemos que $G$ é um *grupo topológico* se as funções $\cdot$ e $i$ forem contínuas.

   (a) Mostre que $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ são grupos topológicos (com a topologia indzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$).

   (b) Mostre que $(S^1, \cdot)$ é grupo topológico com a toplogia induzida de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Mostre que um grupo de matrizes reais $n \times n$ é grupo topológico (com a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}^{n^2}$).

   (d) Seja $G$ um grupo topológico e $H$ subgrupo de $G$. Considere o espaço quociente $G/H$ definido pelas classes laterais a esquerda de $H$, ou seja, pela relação de equivalência definida por $g_1 \sim g_2 \iff g_1 H = g_2 H \iff g_2^{-1} g_1 \in H$. Mostre que:

      i. Se $H$ é um sub-espaço fechado de $G$, então todo conjunto com apenas um ponto em $G/H$ é fechado.

      ii. A aplicação quociente $p : G \to G/H$ é aberta.

      iii. Se $H$ for subgrupo normal e fechado então $G/H$, com a topologia quociente, é um grupo topológico.

6. Seja $Y$ subespaço topológico de $X$ e $\emptyset \neq Z \subset Y$. Demonstre que $Z$ é compacto como subespaço de $Z$ se e seomente se $Z$ é compacto como subespaço de $X$.

7. Seja $X$ espaço compacto e $Y$ sub-espaço também compacto. Mostre através de contra exemplo que $Y$ não é necessariamente fechado em $X$.

8. Seja $X$ compacto e $f : X \to \mathbb{K}$ compacto, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostre que $f$ é limitada e que existem $a, b \in X$ tais que $|f(a)| \leq |f(x)| \leq |f(b)|$, qualquer que seja $x \in X$.

9. Seja $X$ o plano com a métrica da rede ferroviária francesa. Mostre que $X$ não é compacto.

10. Determine quais dos espaços abaixo são compactos. Justifique as respostas.

    (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;
    (b) $S^n \setminus \{polo\ norte\}$ ;
    (c) O toro do qual retiramos um disco aberto.

11. Mostre que a intersecção de dois compactos não é necessariamente compacto. Mostre que a intersecção de uma família qualquer de compactos fechados é compacto.

12. Mostre que $[0, 1) \times [0, 1)$ é homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$.

13. Uma vizinhança compacta de $x \in X$ é um compacto $V \subset X$ tal que $x \in int\,(V)$. Um espaço topológico é dito localmente compacto se todo ponto possuir vizinhança compacta. Seja $X$e spaço Hausdorff e $Y \subset X$ um subconjunto denso e localmente compacto. Mostre que $Y$ é aberto

14. Seja $S_{()} \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq ...$ uma sequência encaixante de fechados em $\mathbb{R}^n$ com $\lim\limits_{n\to\infty} diam\,(S_n) = 0$. Mostre que $\cap_n S_n$ é um conjunto com um único ponto.

15. Sejam$A, B \subset X$, com $A$ compacto e $B$ fechado e $A \cap B \neq \emptyset$. Moste que $\inf \{d\,(a, b)\,|a \in A, b \in B\} > 0$.

16. Considere a aplicação diagonal $\Delta : X \to X \times X$, definida por $\Delta\,(x) = (x, x)$. Mostre que $X$ é Hausdorff se e somente se $\Delta\,(X)$ é fechado em $X \times X$.

17. Dada família $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espaços métricos, mostre que

$$d\,(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n\,(x_n, y_z)}{(1 + d_n\,(x_n, y_z))}$$

define em $\prod X_n$ uma métrica que induz a topologia produto.

18. *Espaço de Helly:* Seja $H$ o conjunto de todas as funções não decrescentes $f : I_{\mathbb{Q}} \to I_{\mathbb{Q}}$ ($I_{\mathbb{Q}}$ é o conjunto dos racionais entre 0 e 1). Considere $H$ como subespaço de $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ (topologia produto).

    (a) Mostre que $H$ é compacto Hausdorff.
    (b) Mostre que $H$ satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade e é sequencialmente compacto.
    (c) Mostre que $H$ é separável.
    (d) Seja $f_t\,(x) = 0$ se $x < t, = 1/2$ se $x = t$ e $= 1$ se $x > t$. Considere a família $A = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ e mostre que esta família é não enumerável mas não possui ponto de acumulação em $H$. Conclua que $H$ não é metrizável.

19. Seja $X$ espaço métrico, $\mathcal{C}$ o espaço das funções (reais) contínuas em $X$. Considere em $\mathcal{C}$ a topologia da convergência uniforme sobre compactos: dada sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $f_n \to f$ se, dado $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ compacto, existe $N$ tal que, para qualquer $x \in K$, $|f_n\,(x) - f\,(x)| < \varepsilon$ se $n > N$. Considere a função $i : X \to \mathcal{C}$ definida por $i\,(x)\,(y) := d_x\,(y) = d\,(x, y)$.

    (a) Mostre que $i$ é contínua e injetora.
    (b) Mostre que $i\,(X)$ é fechado em $\mathcal{C}$ se $X$ for compacto.