MA/MM 453 - Topologia Geral
Lista de Exercícios I

1. Considere as métricas $d_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, $d_2(x,y) = \sum_{i=i}^{n}|x_i - y_i|$ e $d_3(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\,|i = 1,2,...,n\}$ definidas em $\mathbb{R}^n$. Mostre que estas métricas definem a mesma topologia.

2. Seja $(V, \|\cdot\|)$ espaço métrico normado. Mostre que $d(x,y) = \|x - y\|$ para $x, y \in V$ define uma métrica em V.

3. Exiba uma função explícita que realize a enumeração dos racionais, ou seja, uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Conclua que a união enumerável de conjuntos enumeráveis ainda é enumerável.

4. Mostre que se X e Y são enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.

5. Mostre que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Conclua que o conjunto dos transcendentes não é enumerável.

6. Mostre que um conjunto é infinito se e somente se está em bijeção com algum subconjunto próprio.

7. Dadas duas topologias T_1 e T_2 em X, mostre que $T_1 \cap T_2$ também é topologia.

8. Dado $X \neq \emptyset$, defina em quais dos casos podemos afirmar que T é uma topologia:

   (a) $T = \{A \subset X | A^c \text{ é finito}\} \cup \{X, \emptyset\}$;

   (b) $T = \{A \subset X | A \text{ é finito}\} \cup \{X, \emptyset\}$;

   (c) $T = \{A \subset X | A^c \text{ é infinito}\} \cup \{X, \emptyset\}$;

   (d) $T = \{A \subset X | A^c \text{ é enumerável}\} \cup \{X, \emptyset\}$;

   (e) $T = \{A \subset X | A \text{ é enumerável}\} \cup \{X, \emptyset\}$;

9. Considere as seguntes topologias definidas em $\mathbb{R}$:

   - T_1 = topologia usual;
   - T_2 = K-topologia, que tem como base os intervalos (a,b) e os conjuntos da forma $(a,b)\setminus K$, onde $K = \left\{\frac{1}{n} | 0 \neq n \in \mathbb{Z}\right\}$;
   - T_3 = a topologia formada pelo complemento dos conjuntos finitos;
   - T_4 = a topologia do limite superior $\mathbb{R}_s$, que tem como base os conjuntos da forma $(a,b]$;
   - T_5 = a topologia que tem como base os conjuntos da forma $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.

   Determine, para cada uma destas topologias, quais outras ela contém.

10. Seja $\{T_\alpha\}$ uma família de topologias em um conjunto X.

    (a) Mostre que $\cap T_\alpha$ é uma topologia em X.

    (b) $\cup T_\alpha$ é uma topologia em X?

    (c) Mostre que existe uma única topologia minimal contendo todas as coleções T_α e uma única topologia maximal contida em todos T_α.

    (d) Se $X = \{a,b,c\}$, $T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ e $T_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$, determine a menor topologia contendo T_1 e T_2 e maior topologia contida em T_1 e T_2.

11. Mostre que se um espaço topológico é metrizável, então podemos fazê-lo de infinitas maneiras distintas.

12. Dê um exemplo de uma bijeção entre espaços métricos que seja contínua mas não um homeomorfismo.

13. Seja $X = \cup_{k \in \mathbb{N}} (2k, 2k+1]$ com a topologia induzida da reta. Mostre que existe função contínua bijetora de X em $\mathbb{R}$. Mostre que não existe homeomorfismo de X em $\mathbb{R}$.

14. Dado espaço métrico X, encontre uma função contínua e injetora $f : X \to \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ (espaço das funções contínuas de X na reta, considerando a topologia da convergência uniforme sobre compactos).

15. Mostre que a composta de funções contínuas é contínua.

16. Considere na reta real a topologia que tem como base os intervalos semi-abertos da forma $[a, b)$. Com esta topologia, quais das funções abaixo são contínuas?

    (a) $f(x) = x - 5$

    (b) $f(x) = -x$

    (c) $f(x) = 2x + 1$

17. Seja $f : X \to Y$ função entre espaços topológicos. Mostre que f é contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A)$ é fechado para todo $A \subseteq Y$ fechado $\Leftrightarrow f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

18. Seja $A \subset X$, $f : A \to Y$ função contínua. Mostre que existe no máximo um modo de estender f a uma função contínua definida em $\overline{A}$. Dê um exemplo em que não haja tal extensão.

19. Um subconjunto A de um espaço topológico é dito *conjunto perfeito* se $A = D(A) := \{\text{pontos limite de } A\}$.

    (a) Mostre que um conjunto é perfeito se e somente se for fechado e não possui pontos isolados.

    (b) Mostre que um conjunto de Cantor é perfeito.

20. Mostre que $\operatorname{int}(A^c) = \overline{A}^c$.

21. Seja A subespaço topológico de X. Mostre que $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = int(A) = \overline{A}$.

22. Mostre que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são separáveis.

23. Seja X conjunto com a métrica discreta. Dê condição necessária e suficiente para que X seja separável.

24. Considere o conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ das sequências limitadas, com a métrica definida por $\|f\| = \sup\{|f(n)|; n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ não é separável.

25. Considere a reta real com a topologia caótica: $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Mostre que todo subconjunto não vazio de X é denso mas que X não satisfaz o 2^o Axioma da Enumerabilidade.

26. Mostre as seguintes igualdades:

    (a) $\overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$;

    (b) $int(A \times B) = int(A) \times int(B)$;

    (c) $\partial(A \times B) = \overline{(A \times B)} \backslash int(A \times B) = ((\partial(A) \cup int(A)) \times (\partial(B) \cup int(B))) \backslash (int(A) \times int(B))$

27. Encontre espaço topológico $X \equiv \emptyset$ tal que X e $X \times X$ são homeomorfos.

28. Se L é uma reta no plano, descreva a topologia induzida em L como subespaço de $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ (veja a definição de $\mathbb{R}_s$ no exercício 9). Em qual destes casos obtemos a topologia usual?

29. Dadas topologias T_1, T_2 em X dizemos que T_2 é mais fina que T_1 se $T_1 \subseteq T_2$.

    (a) Mostre que a relação *"ser mais fina que"* definine uma ordem parcial no conjunto de todas as topologias de X.

    (b) Mostre que, com esta ordem, a família de topologias de X é um reticulado, ou seja, dadas topologias T_1 e T_2, existe um elemento menor que ambas, maximal com esta propriedade e um elemento maior que ambas, minimal com esta propriedade

    (c) Mostre que a propriedade do item anterior continua válida se tomarmos ao invés de apenas duas topologias, tomarmos uma família qualquer de topologias de X, ou seja, que temos um reticulado completo.

30. Dado conjunto X considere

$$T = \{A \subset X | A^c \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

    (a) Mostre que T é uma topologia.

    (b) Mostre que esta é a menor topologia que torna os conjuntos com um único ponto fechados.

31. Seja X conjunto, $\{X_i\}$ família de espaços topológicos e $f_i : X \to X_i$ família de funções. A *topologia gerada pela família* f_i é a topologia mais fraca que torna todas estas funções contínuas.

    Nos casos abaixo, temos que $X = X_i = \mathbb{R}$. De uma descrição detalhada da topologia gerada por $\{f_i\}$ em cada um dos casos:

    (a) $\{f_i\}$ é o conjunto das funções constantes.

    (b) $\{f_i\}$ contém apenas a função f, definida por $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$.

    (c) $\{f_i\}$ contém apenas a função f, definida por $f(x) = -1$ se $x < 0, f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$.

    (d) $\{f_i\}$ contém apenas a identidade.

    (e) $\{f_i\}$ é o conjunto das funções contínuas com a topologia usual da reta.

32. Seja $\{X_a\}_{a \in A}$ uma família de espaços topológicos. Sejam $B, C \subset A$ disjuntos tais que $B \cup C = A$. Mostre que

$$\prod_{a \in A} X_a \text{ e } \left(\prod_{b \in B} X_b\right) \times \left(\prod_{c \in C} X_c\right)$$

    são homeomorfos.

33. Mostre que a topologia produto possui base enumerável se e somente se a topologia em cada espaço coordenado possui base enumerável e todos os espaços coordenados, a não ser uma quantia enumerável, são espaços indiscretos (sem pontos isolados).

34. Dado espaço quociente $X/\tilde{}$ e $A \subset X$, denotamos

$$\tilde{}A = \{y \in X | y \tilde{} x \text{ para algum } x \in A\}.$$

    Mostre que a projeção $p : X \to X/\tilde{}$ é fechada se e somente se $\overline{(\tilde{}A)} \subset \tilde{}\left(\overline{A}\right)$ para todo $A \subset X$.

35. No plano euclidiano defina a seguinte relação: $(x,y)\,\tilde{}\,(u,v)$ se e somente se $(x,y)=(u,v)$ ou $y=v=0$.

   (a) Mostre que $\tilde{}$ é relação de equivalência .

   (b) Mostre que a projeção $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/\tilde{}$ é fechada.

   (c) Existe uma vizinhança enumerável da classe $[(0,0)]$ cuja intersecção é $\{[(0,0)]\}$.

   (d) Para cada inteiro não negativo m, a sequência $\left\{\left[\left(m,\dfrac{1}{n+1}\right)\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $[(0,0)]$ (em $\mathbb{R}^2/\tilde{}$).

   (e) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ a sequência $\left\{\left(m,\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para qualquer ponto de $p^{-1}\left([(0,0)]\right)$.

   (f) Mostre que o quociente não satisfaz o 1^o axioma da enumerabilidade.

36. Determine quais dos esapços topológicos abaixo são homeomorfos ou não. Exiba um homeomorfismo ou demonstre a possibilidade de exibi-lo. Quando não explicitarmos, a topologia dos espaços é a topologia usual do contexto.

   (a) S^n

   (b) $S^n\setminus\{\textit{polo norte}\}$.

   (c) $\mathbb{R}^n$.

   (d) $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

   (e) $S^{n-1}\times\mathbb{R}$