MA/MM852 - Geometria Diferencial
Lista de Exercícios 5

1. Seja S superfície egular, compacta, conexa e orientável. Suponha que S não é homeomorfa a uma esfera e demonstre que a curvatura gaussiana muda de sinal em S.

2. Calcule a característica de Euler Poincaré de um elipsóide e da superfície definida pela equação $x^2 + y^{10} + z^6 = 1$.

3. Mostre que $(0,0)$ é ponto singular e calcule o índice em $(0,0)$ dos seguintes campos de vetores:

   (a) $v = (x, y)$;

   (b) $v = (-x, y)$;

   (c) $v = \left(x^2 - y^2, -2xy\right)$.

4. Mostre que uma superfície compacta orientável admite um campo de vetores sem pontos paralelos se e somente se for homeomorfa a um toto.

5. Prove que se S tem curvatura Gaussiana constante então os círculos geodésicos tem curvatura geodésica constante.

6. Determine quais das seguintes superfícies são localmente isométricas: Toro de revolução, cone (excluido o vértice), esfera, cilindro, elipsóide (não esférico). Quais são homeomorfas?

7. Seja Δ triângulo geodésico contido em uma vizinhança normal de uma superfície S. Prove, sem utilizar Gauss-Bonnet, que

$$\iint_{\Delta} K d\sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

   onde $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são os ângulos internos de Δ.

8. Seja $p \in S$ e $S_r(p)$ o círculo geodésico centrado em p de raio r. Seja $L(r)$ o comprimento de $S_r(p)$ e $A(r)$ a área da região limitada por $S_r(p)$. Mostre que

$$4\pi A(r) - L^2(r) = \pi^2 r^4 K(p) + R$$

   onde $K(p)$ é a curvatura geodésica em p e $\lim_{r \to o} \frac{R}{r^4} = 0$.