MA/MM852 - Geometria Diferencial
Lista de Exercícios 4

1. Seja S superfície de revolução. Mostre que os meridianos de S são geodésicas. Mostre que um paralelo é uma geodésica se e somente se a reta tangente ao meridiano neste ponto for paralela ao de rotação.

2. Mostre que uma geodésica em um parabolóide $z = x^2 + y^2$ se intersecta uma infinidade de vezes (a menos que esta geodésica seja um meridiano).

3. (a) Mostre que se uma curva é ao mesmo tempo geodésica e linha de curvatura, então a curva é plana.
   (b) Mostre que se uma geodésica (que não é uma reta) é uma curva plana, então ela é uma linha de curvatura.
   (c) Dê um exemplo de uma linha de curvatura que é plana mas não é geodésica.

4. Mostre que as retas são as únicas geodésicas do plano.

5. mostre que, se todas as geodésicas de uma superfície conexa S são planas, então todos os pontos da superfície são umbílicos. Conclua que S está contida em um plano ou em uma esfera.

6. Considere o toro gerado pela rotação do círculo $(x-a)^2+z^2 = r^2, y = 0$ ao redor do eixo z. Considere os paralelos gerados pelos pontos $(a+r, 0)\,, (a-r, 0)$ e $(a, r)\,.$
   (a) Calcule a curvatura geodésica destes paralelos.
   (b) Determine quais destes são geodéscias, linha de curvatura e linha assintótica

7. Considere o triângulo geodésico na esfera formado pelo polo p_N, e dois pontos p e q no equador contidos em meridianos formando um ângulo de θ entre si. Seja $v \in T_{p_N}S^2$ e considere seu transporte paralelo w ao longo do triângulo, retornando a $T_{p_N}S^2$. Qual o ângulo entre v e w?

8. Mostre que as isometrias de S^2 são as restrições a esfera de $O(3, \mathbb{R})$.

9. Seja S superfície conexa. Mostre que o transporte paralelo não depende do caminho ligando dois pontos se e somente se S tiver curvatura Gaussiana constante igual a zero.

10.