1 MA 852 - Lista II

1. Uma maneira de definir um sistema de coordenadas na esfera S^2, dada pela equação $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, é através da *projeção estereográfica* $\pi : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$, que leva o ponto $p \in S^2$ disitinto do polo norte $N = (0,0,2)$ ao ponto de intersecção do plano xy com a reta ligando N a p. Seja $\pi(x,y,z) = (u,v)$, onde $(x,y,z) \in S^2 \backslash \{N\}$. Mostre que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ é definida por

$$x(u,v) = \frac{4u}{u^2+v^2+4}$$
$$y(u,v) = \frac{4v}{u^2+v^2+4}$$
$$z(u,v) = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}$$

Demonstre ainda que, através da projeção estereográfica é possivel cobrir a esfera com duas vizinhanças coordenadas.

2. Mostre que o cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2=1\}$ é superfície regular. Encontre parametrizações tais que as vizinhanças coordenadas cubram todo o cilindro. É possivel encontrar parametrização $\Psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ que cubra todo o cilindro, ou seja, tal que $\Psi(U) = S$?

3. Seja $S^2 = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2=1\}$ a esfera unitária e $A : S^2 \to S^2$ a aplicação antípoda, i.e., $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Mostre que A é um difeomorfismo.

4. Construa um difeomorfismo entre a esfera

$$x^2+y^2+z^2=1$$

e o elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

5. Construa um difeomorfismo entre o cilindro

$$x^2+y^2=1$$

e o conjunto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$.

6. Seja $p = (x_0,y_0,z_0)$ um ponto de uma superfície regular s dada por $f(x,y,z) = 0$, onde 0 é valor regular de f. Mostre que $(x,y,z) \in T_pS$ se e somente se

$$f_x(p)(x-x_0)+f_y(p)(y-y_0)+f_z(p)(z-z_0)=0.$$

7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular e defina

$$\phi(t,v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \qquad (t,v) \in I \times \mathbb{R}$$

obtendo uma superfície parametrizada, chamada de **superfície tangente** de α.

   (a) Mostre que se a curvatura $\kappa(t) \neq 0$, $t \in I$, então a restrição de $\phi(U)$ a $U = \{(t,v) \in I \times \mathbb{R} | v \neq 0\}$ é uma superfície regular.

   (b) Seja superfície tangente de uma curva regular com curvatura que não se anula. Mostre que os planos tangentes ao longo de uma curva $\phi(t, const.)$ são coincidentes.

8. Dada uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco,tal que a curvatura é sempre distinta de zero, construimos uma superfície

$$\phi_r(s,v) = \alpha(s) + r(n(s)\cos v + b(s)\sin v),$$
$$r = \mathit{constante} \neq 0, s \in I,$$

chamada de **superfície tubular,** onde $n(s)$ é o vetor normal e $b(s)$ o binormal da curva $\alpha(s)$. Mostre que:

   (a) Se $\phi_r(s,v)$ for parametrização regular, então, o vetor

$$N(s,v) = -(n(s)\cos v + b(s)\sin v)$$

   é vetor unitário normal a superfície em $p = \phi_r(s,v)$.

   (b) Determine o intervalo em que podemos escolher a constante r de modo que $\phi_r(s,v)$ seja superfície regular, quando $\alpha(s)$ for uma reta e quando $\alpha(s)$ for uma circunferência de raio R. Identifique estas duas superfícies.

(c) Prove que a área da superfície é $2\pi r$ vezes o comprimento de da curva α.

(d) Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental das seguintes supefícies parametrizadas, nos pontos em que estas forem regulares:

(e) $\Phi(u,v) = \left(au\cos v, bu\sin v, u^2\right)$ (paraboloide elíptico)

(f) $\Phi(u,v) = \left(au\cosh v, bu\sinh v, u^2\right)$ (paraboloide hiperbólico)

9. Seja $f(u,v)$ função diferenciavel e S o gráfico de f. Seja $R \subset S$ uma região limitada, Q a projeção de R no plano xy e A a área de R. Prove que

$$A = \int\int_Q \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}dudv.$$

10. Considere a esfera unitária parametrizada pela projeção estereográfica.

(a) Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental.

(b) Calcule a area da esfera compreendida entre os paralelos θ_1 graus norte e θ_2 graus sul.

11. Determine a aplicação normal de Gauss $N : S \to S^2$ do *cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ e do *parabolóide hiperbólico* $z = y^2 - x^2$.

12. Considere um ponto p do cilindro definido no exercício anterior e um vetor $v \in T_pS$. Mostre que se v for paralelo ao eixo z, então $dN_p(v) = 0$ e se v for paralelo ao eixo xy então $dN_p(v) = -v$.

13. Considere o ponto $p = (0,0,0)$ do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$. Seja $\alpha(t)$ curva em S tal que $\alpha(0) = p$.

(a) Mostre que o vetor tangente $\alpha'(0)$ é ortogonal ao eixo z, ou seja, se $\alpha'(0) = (a,b,c)$ então $c = 0$.

(b) Mostre que $dN_p(\alpha'(0)) = dN_p((a,b,0)) = (2a, -2b, 0)$.

14. Descreva a região da esfera S^2 coberta pela aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ para as seguintes superfícies:

(a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\right\}$ (paraboloide de revolução).

(b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$ (hyperbolóide de revolução).

(c) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\right\}$ (cilindro).

15. Determine os pontos elípticos, hiperbólicos, parabólicos e planares das seguintes superfícies:

(a) Toro

$$((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

(b) Do cilindro $(\cos u, \sin u, v)$

(c) De uma superfície de revolução $(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$

16. Dado um ponto $p \in S$, demonstre que a soma das curvaturas normais em duas direções ortogonais é constante.

17. Seja S superfície regular e $p \in S$ ponto não planar no qual a curvatura média se anula. Mostre que este ponto possui duas direções *ortogonais* para as quais a curvatura normal se anula.

18. Mostre que em um ponto hiperbólico as direções principais bissectam as direções assintóticas ($k_n = 0$).

19. Mostre que a soma das curvaturas normais em um ponto $p \in S$ é constante em qualquer par de direções ortogonais.

20. mostre que os meridianos de um toro são linhas de curvatura.

21. Se duas superfícies S_1 e S_2 se interceptam ao longo de uma curva γ, então a curvatura k_γ de γ em um ponto p é dada por

$$k^2\sin^2\theta = k_{1,n}^2 + k_{2,n}^2 - 2k_{1,n}k_{2,n}\cos\theta$$

onde $k_{i,n}$ é a curvatura normal de γ como curva em S_i e θ é o ângulo formado pelas normais a S_1 e S_2 em p.

22. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ as curvaturas normais em p ao longo de direções fazendo ânculos de $0, 2\pi/m, ..., (m-1)\,2\pi/m$ com uma direção principal. Mostre que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = mH.$$