MA 752 - Lista de exercícios II

1. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta e l maior que o comprimento de $\overline{AB}$. Mostre que, dentre todas as curvas de comprimento l ligando A e B, aquela que, junto com o segmento delimita a maior área possível é um arco de cículo passando por A e B.

2. Seja γ curva plana, T reta tangente em um ponto $p \in \gamma$ e L reta ortogonal a T a uma distância d de p. Seja $h = h(d)$ o comprimento do segmento de L ligando γ a T. Mostre que $|k(p)| = \lim_{d \to 0} \frac{2h}{d^2}$.

3. Seja γ curva plana contida no interior de um disco de raio r. Mostre que existe $p \in \gamma$ que tem curvatura $k \geq 1/r$.

4. Seja $\gamma(s)$, $s \in [0, l]$ curva plana simples, fechada de comprimento $L := L(\gamma)$. Mostre que, se $0 \leq k(s) \leq c$ então $L \geq 2\pi/c$.

5. Seja $\gamma(s)$, $s \in [0, l]$ curva plana, fechada e convexa, como orientação positiva. Considere a *curva r-paralela* $\beta(s) := \gamma(s) - rn(s)$. Mostre que:

   (a) $L(\beta) = L(\gamma) + 2\pi r$;

   (b) $A(\beta) = A(\gamma) + rl + \pi r^2$;

   (c) $k_\beta(s) = k_\gamma(s) / (1 + rk_\gamma(s))$

   Obs: L, A e k referem-se a comprimento, área e curvatura

6. A *evoluta* de uma curva plana é a curva traçada pelo centro dos círculos osculadores (círculos de curvatura). Mostre que vértices da curva correspondem a singularidades da evoluta.

Espiral logarítmica

7. *Espiral logarítmica* é a curva que satisfaz a seguinte propriedade: a tangente forma um ângulo constante com a reta que liga a curva a um ponto fixo p (que chamaremos de foco da espiral).

   (a) Parametrize uma espiral logarítmica (em coordenadas polares);

   (b) Mostre que o raio de curvatura de uma espiral logarítmica é proporcional ao comprimento de arco;

(c) Imagine um fio não elástico com uma ponta presa a uma curva. Estique o fio de modo que fique tangente a curva no ponto em questão. Enrole o fio na curva, mantendo-o esticado. O lugar geométrico traçado pela ponta livre da curva é chamada de evoluta da curva. Em outras palavras, dada curva $\gamma(s)$ dizemos que uma curva $\beta(s)$ é evoluta de γ se a reta tangente a $\beta(s)$ for normal a γ em $\gamma(s)$.Mostre que a evoluta de uma espiral logarítmica é uma espiral logarítmica.

(d) Parametrize a involuta de uma espiral logarítmica.

(e) Seja R um retângulo áureo e $\{x_n\}$ uma sequência de pontos em R dividindo-o em quadrados. Mostre que todos estes pontos estão contidos em uma espiral logarítmica.

(f) Seja p o foco de uma espiral logarítmica. Considere uma familia de n raios por p formando ângulos de $2\pi/n$. Sejam $..., x_{n,-2}, x_{n,-1}, x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, ...$ os pontos de intersecção destes raios com a espiral. Seja $d_{n,i}$ o comprimento do segmento ligando $x_{n,i}$ a $x_{n,i+1}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} d_{n,i}$ é o número áureo (Hilton, P.; Holton, D.; and Pedersen, J. Mathematical Reflections in a Room with Many Mirrors. New York: Springer-Verlag, 1997, pp. 2-3).