1 MA 752 - Lista de exercícios I

1. Um ponto p se move no espaço de modo que sua projeção no plano xy percorre uniformemente a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ com velocidade angular ω, e sua projeção no eixo z se move uniformemente com velocidade c. A curva descrita pelo ponto p é chamada de **hélice**. Encontre uma parametrização da curva, tomando o tempo t como parâmetro. Assuma que no momento inicial $t = 0$ o ponto p possui coordenadas $(a, 0, 0)$.

2. Um disco de raio a se move uniformemente como uma roda ao longo do eixo x. Fixe um ponto p no disco, a uma distância $0 \leq b \leq a$ do centro deste disco. Encontre uma parametrizaçao da curva traçada por p, tomando o tempo t como parâmetro e assumindo que no instante $t = 0$ o centro do disco tem coordenadas $(0, a)$ e o ponto p coordenadas $(0, a - b)$. A curva traçada por p é chamada cicloide.

3. Encontre os pontos singulares da cicloide definida no exercício anterior.

4. Encontre a equação da tangente à curva (t^2, t^3) no ponto $(0, 0)$.

5. Encontre os pontos singulares da **tratrix**

$$x = a \sin t, \quad y = a(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}) \qquad (0 < t < \pi)$$

   e determine sua natureza.

6. Encontre as equações da reta tangente, do plano osculador, do plano normal, da normal principal e da binormal da hélice encontrada do exercício 1.

7. Prove que se todas as retas tangentes a uma curva passam por um ponto fixo dado, então a curva é uma reta (ou segmento de reta).(Dica: encontre a equação genérica da reta tangente, suponha que o ponto fixo é a origem $(0, 0, 0)$, e prove que a curva esta contida na interseccão de dois planos distintos).

8. Ache o comprimento das seguintes curvas, nos intervalos definidos:

   (a) A parábola $y = bx^2$, com $-a \leq x \leq a$.

(b) A hélice $(a\cos\omega t, a\sin\omega t, bt)$, com $0 \leq t \leq \dfrac{2\pi}{\omega}$.

9. Encontre a expressão para o comprimento de arco de uma curva plana dada em coordenadas polares $(x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta)$, de uma curva dada pela equação $\rho = \Phi(\theta)$.

10. Use o ítem anterior para encontrar o comprimento da espiral $\rho = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2$

11. Seja $c(s)$ curva regular com torção $\tau(s) \neq 0$. Mostre que se o vetor tangente $t(s) = c'(s)$ forma um ângulo constante com uma direção fixa, então $\dfrac{\kappa(s)}{\tau(s)}$ é constante.

12. Determine quais são as curvas com curvatura e torção constantes.

13. Dada função $k(s)$, mostre que, a menos de movimento rígido, existe uma única curva $\gamma(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco que tem $k(s)$ como curvatura (com sinal).

14. Usando o resultado do exercício anterior, encontre curvas que satisfazem:

    (a) $k^2(s) + s^2 = 1$

    (b) $k(s) = 1/s$

    (c) $k(s) = \lambda s$

15. Considere a curva parametrizada

$$\gamma_n(t) = \left(\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \cos t\right)\cos\frac{t}{n} - \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}, \sin t, \left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \cos t\right)\sin\frac{t}{n}\right).$$

    Mostre que, para n suficientemente grande, a torção de γ_n não se anula.

16. Seja C curva bi-regular orientada. Mostre que as quatro condições abaixo são equivalentes:

    (a) O vetor tangente forma um ângulo constante com alguma direção;

    (b) O vetor normal é paralelo a algum plano fixo;

(c) O vetor binormal forma um ângulo constante com alguma direção;

(d) A curvatura e a torção são proporcionais.

Mostre que sob estas condições a curva admite uma parametrização da forma $\gamma(t) = \beta(\tau) + (t - t_0)\, v$, onde τ é a torção, $\beta(\tau)$ é uma curva contida em um plano P e v é um vetor perpendiclar a este plano.