MA724/MM845
Grupos de Refelexão e Edifícios de Tits
18 de agosto de 2006
Lista de Exercícios I

Os sete primeiros exercíos devem ser entregues em duas semanas, pois contam para avaliação. Não são difíceis e mexem com os conceitos básicos. Os exercícios marcados com **(*)**, apesar de não serem difíceis, podem ser trabalhosos.

1. Seja $z = \rho e^{i\theta}$ um número complexo, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Considere $G = \{z^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

   Considere a operação binária definida pelo produto usual de números complexos.

   (a) Mostre que G é um grupo.

   (b) Mostre que o grupo é finito se e somente se $\rho = 1$ e $\theta = pq2\pi$ (com p, q inteiros) ou se $\rho = 0$. Detemine a ordem dos grupos.

2. **(*)** Seja

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p, pprimoead - bc \neq 0 \right\},$$

   com o produto usual de matrizes. Mostre que G é grupo e determine sua ordem.

3. **(*)** Seja P_{2n} um polígono regular com $2n$ lados e vértices $\{v_1, v_2, ..., v_{2n}\}$ enumerados em ordem cíclica. Denotamos por l_k a reta que passa pelos vértices v_k e v_{k+n} e por r_k a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{v_k v_{k+1}}$ e $\overline{v_{k+n} v_{k+n+1}}$ (respectivamente as retas que ligam vértices opostos e pontos médios de lados opostos). Denotamos por λ_k a reflexão na reta l_k, por ρ_k a reflexão na reta r_k e por τ_i a rotação em torno do (bari)centro do polígono de um ângulo de $i\frac{2\pi}{2n}$.

   Definimos
$$D_{2n} = \{\rho_k, \lambda_k, \tau_i | \kappa = 1, ..., n; i = 1, ..., 2n\}.$$

   (a) Considerando a composição usual de transformações, mostre D_{2n} é um grupo (chamado de grupo Diedral).

   (b) Realize o grupo diedral D_{2n} como um grupo de matrizes, ou seja, pense no polígono P_{2n} como um inscrito no círculo unitário e com um vértice no ponto $(1, 0)$ e determine matrizes que realizam cada uma das simetrias ρ_k, λ_k e τ_i. de um polígono regular de n lados (considere o polígono inscrito no círculo unitário).

4. **(*)** Seja G um grupo de ordem menor ou igual a 5. Mostre que G é abeliano.

5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, seja $T_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a transformação $T_{ab}(x) = ax + b$.

(a) Mostre que $G = \{T_{ab} | a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ é grupo com a composição de funções.

(b) Mostre que $N = \{T_{1b} \in G\}$ é subgrupo normal e que G/N é isomorfo ao grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$.

6. Mostre que os grupos $G = \left\langle a, b | a^2 = b^n = (ab)^2 = e \right\rangle$ e $H = \langle x, y | x^2 = y^2 = (xy)^n \rangle$ são isomorfos.

7. Sejam G_1 e G_2 subgrupos normais de um grupo G. Seja

$$G_1 G_2 = \{g_1 g_2 | g_i \in G_i, i = 1, 2\}$$

o grupo produto. Mostre que $G_1 G_2 \simeq G_1 \times G_2$ (produto direto) se e somente se

$$G_1 \cap G_2 = \{e\} .$$

Tente generalizar esta proposição para uma familia finita de subgrupos de G.

8. (a) Mostre que

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

com o produto usuais de matrizes, é um grupo.

(b) Mostre que todo elemento de $SL(2, \mathbb{Z})$ pode ser escrito como produto

$$A_1^{\sigma_{11}} A_2^{\sigma_{21}} A_3^{\sigma_{31}} \cdots A_1^{\sigma_{1k}} A_2^{\sigma_{2k}} A_3^{\sigma_{3k}}, \quad \sigma_{ij} \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$$

dos elementos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Dados subgrupos $H_1, H_2 < G$, mostre que $H_1 \cup H_2$ é subgrupo se e somente se $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.

10. Mostre que um grupo G é finito de ordem primo se e somente se G não tem subgrupos não triviais.

11. Seja G grupo e $Z(G)$ o seu centro: $Z(G) := \{g \in G | gh = hg, \forall h \in G\}$. Mostre que $G/Z(G)$ é cíclico $\iff G$ é abeliano $\iff Z(G) = G$.

12. Encontre um homomorfismo injetor do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ em $GL(2, \mathbb{R})$.

13. Seja G grupo finito, $T : G \to G$ isomorfismo tal que $T(x) \neq x$ se $x \neq e$ e $T^2 = Id$. Prove que G é abeliano.

14. **(**)** Considere $\mathbb{H} = \{z = a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ o corpo dos quatérnios. Lembre que a soma é definida coordenada a coordenada e o produto de dois quatérnios é definido pela propriedade distributiva e considerando que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$.

(a) Mostre que $\|z\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ define uma norma em $\mathbb{H}$, ou seja $\|z + w\| \leq \|w\| + \|w\|$, $\|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\|$ e $\|z\| > 0$ se $z \neq 0$.

(b) Mostre que a esfera unitária S^3, o conjunto dos quatérnios unitários é um subgrupo multiplicativo dos quatérnios.

(c) Dado $z \in S^3$, mostre que o produto a esquerda

$$\begin{aligned} L_z &: \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ &: w \longmapsto zw \end{aligned}$$

é uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$.

(d) Dado $z \in S^3$, considere a função

$$\begin{aligned} \phi_z &: \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ &: w \longmapsto zw\overline{z} \end{aligned}$$

onde $\overline{z} = a - bi - cj - dk$. Mostre que o subespaço real gerado pelos vetores i, j, k é invariante por ϕ_z, ou seja, dado $w = bi + cj + dk$ então existem $a', b', c' \in \mathbb{R}$ tais que $\phi_z(w) = a'i + b'j + c'k$.

(e) Conclua a partir dos dois ítens anteriores que cada transformação ϕ_z pode ser considerada um elemento de $O(3, \mathbb{R})$, o grupo das matrizes reais 3×3 ortogonais .

(f) Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi &: S^3 \to SO(3, \mathbb{R}) \\ &: z \longmapsto \phi_z \end{aligned}$$

é um homomorfismo.

(g) Assuma que ϕ é sobrejetor e conclua que $SO(3, \mathbb{R}) \simeq S^3 / \{\pm Id\}$.

(h) Para mostrar que ϕ é sobrejetora, siga os seguintes passos: Mostre que todo elemento de $SO(3, \mathbb{R})$ deixa um subespaço invariante. Mostre que se tomarmos uma base ortonormal e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ tal que $A(e_1) = e_1$, então a matriz de A nesta base é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Mostre em seguir que, se $B(v_1) = v_1$, então existe $C \in SO(n)$ tal que $CBC^{-1}(e_1) = e_1$. Encontre quaternios ψ e α tais que $\phi_\psi = C$ e $\phi_a = A$.