MA 604 - Espaços Métricos
Prova II
04 de dezembro de 2006
Resolução resumida da última prova em itlico

1. *(2,5 pontos)* Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique brevemente sua resposta:

   (a) O interior de um conjunto conexo é conexo

   Falso, basta considerarmos das bolas disjuntas em $\mathbb{R}^n$ conectadas por um caminhho qualquer.

   (b) A fronteira de um conjunto conexo é conexo.

   Falso. $[a, b]$ *é conexo mas sua fronteira,* $\{a, b\}$*, não é.*

   (c) Seja $f : M \to N$ contínua e sobrejetora. Se M tem m componentes conexas e N tem n, então $m \geq n$.

   Verdadeira. Sendo f contínua, a imagem de cada compontente conexa deve ser um conexo. Logo, sendo sobrejetora, não pode aumentar o número de componentes conexas.

   (d) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então cada componente conexa de A é aberta.

2. *(2,5 pontos)* Considere a sequência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } x \leq 1/n \\ 0 & \text{se } x \geq 1/n \end{cases}$$

   (a) Mostre que (f_n) converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}.$$

   Para $x = 0$ temos que $f_n(x) = 1$ para todo n. PAra $x \neq 0$ basta considerar n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < x$ e temos que para todo $n > n_0$ temos $f_n(x) = 0$.

   (b) Considere no espaço das funções contínuas $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ as seguintes normas:

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)|$$
$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$
$$\|f\|_3 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\, dx}$$

   e determine com quais destas normas o espaço **não** é completo. Justfique sua resposta.

   Vimos em sala que com a primeira norma o espaço é completo. Considerarmos a segunda norma, temos que, para a sequência f_n acima definida, temos que (com $n < m$) que $d(f_n, f_m) = 2/n - 2/m < 2/n$ de modo que esta é uma sequência de Cauchy (que não pode convergir no espaço, pois converge para um função não contínua. Argumento semelhante (com integral pouco mais trabalhosa) é usado para demonstrar a não completude relativa a terceira norma.

3. *(2,5 pontos)* Assuma a seguinte definição de compacidade: Um subconjunto K de um

espaço métrico é compacto se toda cobertura $K \subset \cup_{i \in I} A_i$ de K por conjuntos aberto admitir subcobertura finita $K \subset \cup_{j=1}^{n} A_{i_j}$.

(a) Mostre que um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.

Para mostrar que é liitado, basta considerarmos a cobertura $K \subset \cup_{x \in K} B(x;1)$, que admite subcobertura finita $K \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i;1)$ e $diametro\left(\cup_{i=1}^{n} B(x_i;1)\right) \leq n \cdot diametro\left(B(x_i;1)\right) \leq 2n$ Para mostrar que K é fechado, supomos que existe $x \in \overline{K} \backslash K$ e consideramos a cobertura $K \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} \left(M \backslash B\left(x; \frac{1}{n}\right)\right)$ e asumindo a exisência de sucobertura finita $K \subset \cup_{i=1}^{k} \left(M \backslash B\left(x; \frac{1}{n_i}\right)\right)$ temos que $K \subset M \backslash B\left(x; \frac{1}{n_k}\right)$, contradizendo o fato de termos $x \in \overline{K}$.

(b) Mostre através de contra-exemplo que nem todo conjunto fechado e limitado é compacto.

COnsidere um conjunto X com a métrica discreta ($d(x,y) = 1$ se $x \neq y$). Temos então que X é fechado (todo conjunto é fechado em si mesmo) e limitado (tem diâmetro 1). Mas X será comapcto se e somente se for finito.

4. *(2,5 pontos)* Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua, $A = f(a) > f(b) = B$. Demonstre que

(a) Dado $B \leq C \leq A$ existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = C$.

Como $[a,b]$ é conexo, sua imagem $f([a,b])$ tb será conexo, logo um intervalo da reta. Temos então que se $f(b) = B \leq C \leq A = f(a)$ então $C \in f([a,b])$, ou seja, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = C$.

(b) Mostre que existem $m, l \in [a,b]$ tais que $f(l) \leq x \leq f(m)$, $\forall x \in [a,b]$.

Como $[a,b]$ é fechado e limitado da reta, este é compacto e portanto sua imagem também é compacata. MAs um conjunto compacto deve ser limitado, logo existem L, M tais que $L \leq f(x) \leq M$. Mas sendo $f([a,b])$ compacto, este também é fechado, logo o supremo e o infimo pertencem ao conjnto, ou seja, $L, M \in f([a,b])$ ou seja, xistem $m, l \in [a,b]$ tais que $f(l) \leq x \leq f(m)$, $\forall x \in [a,b]$.

5. *(2,5 pontos)* Seja M espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração (existe $\lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y), \forall x, y \in M$).

(a) *Dado $x \in M$, mostre existe x_0 tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, *onde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é a sequência definida por $x_n = f^n(x)$.*

Devemos constatar que $n = m + k$ temos que $d(x_n, x_m) \leq \lambda^m d\left(f^k(x), x\right) = \lambda^m d(f(x), x) \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}$ de modo que está é sequência de Cauchy. Como o espaço é completo esta deve convergir.

(b) Mostre que x_0 é ponto fixo de f.

Pela continuidade de f temos que $f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0$.

(c) Mostre que este é o único ponto fixo de f.

Se $f(x_1) = x_1$ *e* $f(x_0) = x_0$ *temos que* $d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) < \lambda d(x_0, x_1)$ *donde segue que* $d(x_0, x_1) = 0$ *ou seja,* $x_0 = x_1$.