MA604 - Espaços Métricos
Lista de Exercícios V
novembro de 2006

1. Mostre que se uma aplicação entre espaços métricos $f : M \to N$ leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy, então f é contínua. Mostre ainda, através de um contra-exemplo, que uma função contínua não necessariamente leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

2. Seja E o espaço de todas as sequências limitadas de números reais. Defina $|(a_i)| = \sup |a_i|$. Mostre que, com esta norma, M é espaço métrico completo.

3. Uma série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ em um espaço vetorial normado E é dita *normalmente convergente* se a sequência das somas parciais $s_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ for convergente, ou seja, se $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$.

   (a) Mostre que, se E for completo, então uma série normalmente convergente é convergente.

   (b) Mostre que isto não é necessariamente verdadeiro se E não for completo.

4. Considere a sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } x \leq 1/n \\ 0 & \text{se } x \geq 1/n \end{cases}$$

   (a) Mostre que (f_n) converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}.$$

   (b) Considere no espaço das funções contínuas $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ as seguintes normas:

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)|, \ \|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

$$\|f\|_3 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\, dx}$$

   e determine com qual destas normas o espaço não é completo.

5. Mostre que as seguintes afirmações sobre um espaço métrico M são equivalentes:

   (a) i. Toda sequência de Cauchy de M é constante a menos de um número finito de termos.

   ii. M é espaço completo e discreto.

   iii. Qualquer subespaço de M é completo.

6. Seja $\sum a_n$ um série convergente de números reais positivos. Mostre que se (x_n) for uma sequência em um espaço métrico tal que $d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$, para todo n, então (x_n) é sequência de Cauchy.

7. Dada sequência de (x_n) em espaço métrico M, considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(p) = d(x_n, x_{n+p})$. Mostre que (x_n) é sequência de Cauchy se e somente se f_n converge uniformemente para a função nula.

8. Dada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, com derivada limitada, mostre que f é uniformemente contínua.

9. Prove que um subconjunto aberto A de um espaço métrico completo M é homeomorfo a um espaço métrico completo. (*Considere* $B = M \backslash A$ e utilize a métrica

$$\rho(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,B)} - \frac{1}{d(y,B)} \right|.)$$

10. Dê exemplo de espaço métrico conexo e não separável.

11. Mostre que uma função contínua definida em um espaço métrico compacto é uma função fechada, ou seja, leva conjuntos fechados em conjuntos fechados.

12. Seja X espaço métrico compacto e $f : X \to Y$ bijeção contínua. Prove que f é homeomorfismo.

13. Dados subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, defina $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Se A e B forem fechados, podemos concluir que $A + B$ é fechado? E se assumirmos que A, além de fechado, é limitado?

14. Seja M espaço métrico compacto e $\mathcal{A}$ um conjunto de funções reais definidas em M. Assuma que $\mathcal{A}$ é fechado pelo produto (pontual de funções) e que para todo $x \in M$ existe função em $\mathcal{A}$ que se anula em uma vizinhança de x. Mostre que $\mathcal{A}$ contém a função nula.

15. Seja $\{f_i\}$ sequência de isometrias : $M \to M$. Suponha que f_i converge pontualmente para f. Mostre que f é uma isometria. Mostre que se M for compacto, a convergência é uniforme.

16. Mostre que um subconjunto de um espaço métrico é fechado se e somente se sua intersecção com qualquer subconjunto compacto for fechada.

17. Seja M espaço métrico compacto e $f : M \to M$ função sobrejetora, contínua tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Mostre que f é uma isometria. Conclua que uma bijeção $g : M \to M$ tal que $d(g(x), g(y)) \leq d(x, y)$ é uma isometria.

18. Considere em $P[X]$ a norma $|a_n X^n + ... + a_1 X + a_0| = |a_n| + ... + |a_0|$ e mostre que as bolas de $P[X]$ não são compactas.

19. Utilize o métodom da diagonal de Cantor para mostrar que $M = \Pi_{i=1}^{\infty} M_i$ é compacto se cada um dos fatores for compacto.

20. *(Conjunto de Cantor e Curva de Peano)* O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ obtido do seguinte modo: Retira-se o seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$, restando os intervalos fechados $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. A seguir, retira-se o terço médio aberto de cada intervalo, ou seja, retira-se os intervalos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$, restando então

$$[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Se denotarmos por I_n os intervalos abertos retirados na etapa n, temos que o conjunto de Cantor é expresso como $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

(a) Mostre que K é fechado.

(b) Mostre que $int(K) = \emptyset$.

(c) Encontre um homeomorfismo entre $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ e K *(considere a expressão dos reais na base 3)*.

(d) Mostre que $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ e conclua que $K \times K$ é homeomorfo a K.

(e) Encontre um função contínua sobrejetora : $K \to [0, 1]$.

(f) Conclua que existe função contínua sobrejetora : $K \to [0, 1] \times [0, 1]$

(g) Mostre que é possível extender a função obtida no ítem anterior a uma função contínua definida no intervalo $[0, 1]$.

(h) Conclua que existe função contínua e sobrejetora $f : I \to I \times I$.