MA604 - Espaços Métricos
Lista de Exercícios IV
Outubro de 2006

1. Dadas funções contínuas $f, g : M \to N$ com $f(a) \neq g(a)$, mostre que existe vizinhança V do ponto a tal que $f(V) \cap g(V) = \emptyset$.

2. Mostre que uma função entre espaços métricos é contínua se e somente se ela leva sequências convergentes em sequências convergentes.

3. Mostre que um espaço métrico X é discreto se e somente se toda função definida em X for contínua.

4. Determine a cardinalidade do conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5. Mostre que todo espaço métrico é homeomorfo a um espaço métrico de diametro finito.

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = x \sin(1/x)$ para $x \neq 0$. Mostre que f é contínua e determine os intervalos abertos na qual f é Lipschitz.

7. Mostre que os espaços métricos abaixo são todos homeomorfos:

   (a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\right\}$

   (b) $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

   (c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x^2 + y^2 < 2\right\}$

   (d) $S^2 \backslash \{N, S\}$, onde $N = (0, 0, 1)$ e $N = (0, 0, -1)$

   (e) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2; z > 0\right\}$

8. Em um espaço vetorial V com produto interno de dimensão $n < \infty$, dados $\{a_1, ..., a_k\}$,$\{b_1, ..., b_k\}$ com $k \leq n+1$ e $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$, mostre que existe isometria $f : V \to V$ com $f(a_i) = b_i$ para todo $i = 1, ..., k$. Mostre que esta isometria é única se $k = n + 1$. Mostre que a existência continua valendo para k qualquer.

9. Dada função contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}$, mostre que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

10. Dado um subconjunto qualquer $A \subset \mathbb{R}^2$ e uma reta l definida pela equação $ax + by + c = 0$, esta reparte A em dois subconjuntos disjuntos,

$$A^+ = \{(x, y) \in A | ax + by + c > 0\}$$
$$A^- = \{(x, y) \in A | ax + by + c < 0\}.$$

Considere dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tais que $\mu(A^+), \mu(A^-), \mu(B^+)$ e $\mu(B^-)$ variem continuamente com os parâmetro a, b e c, onde $\mu(X)$ é a área de X (estamos em particular assumindo que as figuras em questão são mensuráveis). Mostre que existe reta l que particiona A e B de modo a termos, simultaneamente, $\mu(A^+) = \mu(A^-)$ e $\mu(B^+) = \mu(B^-)$.

11. Mostre que os seguintes grupos e conjuntos de matrizes são conexos por caminhos:

    (a) $\mathcal{D}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} | a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, i, j = 1, ..., n\}$

    (b) $\{A \in \mathcal{D}(n, \mathbb{C}) \,|\, |a_{ii}| = 1, i = 1, ..., n\}$

    (c) $\{\text{matrizes hermitianas}\} = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \,|\overline{A}^T = A\right\}$

    (d) $U(n) = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \,| A\left(\overline{A}^T\right) = Id\right\}$

    (e) $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \,|\, \det A \neq 0\}$

12. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Mostre que $\mathbb{R}^n \backslash X$ possui exatamente uma componente conexa ilimitada ($n > 1$).

13. Uma função $f : X \to Y$ é dita aberta (fechada) se $f(A)$ é aberto (fechado), para todo $A \subset X$ aberto (fechado).

    (a) Dê um exemplo de uma função contínua que não é aberta, de uma função aberta que não é contínua e de uma função contínua e aberta.

    (b) Dê um exemplo de uma função contínua que não é fechada, de uma função fechada que não é contínua e de uma função contínua e fechada.

    (c) Se $f : X \to Y$ for uma bijeção, mostre que é equivalente f ser aberta, f ser fechada e f^{-1} ser contínua.

14. Dados subconjuntos $A, B \subset X$, defina $d(A, B) = \inf_{\substack{a\in A \\ b\in B}} d(a, b)$.

    (a) Se $B = \{x\}$, mostre que $d(A, B) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$.

    (b) Dê um exemplo de dois subconjuntos fechados A e B de um espaço métrico, tais que $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.

15. Mostre que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.