MA 604 - Espaços Métricos
Lista de Exercícios II
setembro de 2006

1. Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de relações de equivalência em A, totalmente ordenada pela inclusão. Mostre que $\bigcup_{i \in I} R_i$ é uma relação de equivalência em A.

2. Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de relações de ordem em A, totalmente ordenada pela inclusão. Mostre que $\bigcup_{i \in I} R_i$ é uma relação de ordem em A.

3. Dados $B \subset A$ com $\aleph_0 \leq o(B) < o(A)$. Qual é a cardinalidade de $A - B$.

4. Se $o(A) = o(C)$ e $o(B) = o(D)$ então $o(A \times B) = o(C \times D)$.

5. Mostre que $o((a, b)) = o([a, b]) = o((a, b]) = o(\mathbb{R})$.

6. Uma cadeia C é dita *densa* se para quaisquer $a, b \in C$ com $a < b$, existe $x \in C$ tal que $a < x < b$. Sejam A e B cadeias enumeráveis densas sem elemento máximo ou mínimo. Mostre que existe *isomorfismo de ordem* entre A e B: uma bijeção $\phi : A \to B$ tal que $x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$. Começe enumerando os conjuntos A e B (esta enumeração não terá relaçõa nenhuma com a ordem) e comece associando elementos de um conjunto a elementos do outro, alternando, primeiro de A em B e depois de B em A.

7. Dada uma cadeia enumerável densa A, mostre que, a menos de isomorfismo de ordem, existem exatamente 4 possibilidades para A.

8. Seja $\mathcal{X}$ uma família de conjuntos e $\mathcal{Y} = \{B | B \subset A para algum A \in \mathcal{X}\}$. Mostre que M é elemento maximal de $\mathcal{Y}$ se e somente se M for elemento maximal de X.

9. Mostre que todo espaço vetorial possui uma base.

10. Mostre que todo ideal próprio de um anel comutativo com identidade está contido em um ideal próprio maximal.

11. Mostre que não existe isomorfismo de ordem entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

12. Mostre que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

13. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável.

14. Descreva os inteiros como uma união disjunta $\mathbb{Z} = \overset{\circ}{\bigcup\limits_{i \in I}} A_i$ com I enumerável infinito e cada A_i infinito.

15. Dados números cardinais a, b e d com $a \leq b$, mostre que:

    (a) $a + d \leq b + d, \quad ad \leq bd, \quad a^d \leq b^d$;

    (b) $ab = \sum_{i \in b} a, \quad a^b = \Pi_{i \in b} a$;

    (c) $a^{b+d} = a^b a^d, \quad (ab)^d = a^d b^d, \quad a^{bd} = \left(a^b\right)^d$